

Cours de 3^{ème} année

Processus et calcul stochastique

Sarah Lemler

École CentraleSupélec

Table des matières

1	Quelques rappels sur les processus	7
1.1	Notion de processus	7
1.2	Processus gaussiens	7
1.2.1	Variables aléatoires gaussiennes	7
1.2.2	Vecteur gaussien :	8
1.2.3	Processus gaussien :	9
1.3	Espérances conditionnelles de variables aléatoires réelles	11
1.4	Filtration, temps d'arrêt et martingales indexés par $\mathbb{N}$	13
1.4.1	Filtration	13
1.4.2	Temps d'arrêt	13
1.4.3	Martingales	14
2	Le mouvement brownien	15
2.1	Définition, propriétés	15
2.2	Propriétés asymptotiques du mouvement brownien standard	16
2.3	Mouvement brownien par rapport à une filtration	18
2.3.1	Quelques définitions	18
2.3.2	$\mathcal{F}_t$ – $\mathbb{P}$ – mouvement brownien	19
3	Intégrales de processus gaussiens à trajectoires continues	23
3.1	Quelques résultats préliminaires	23
3.2	Intégrales de processus gaussiens à trajectoires continues	24
4	Intégrale de Wiener	27
4.1	Quelques définitions et résultats préliminaires	27
4.2	Intégrales des fonctions en escalier	28
4.3	Intégrales de Wiener d'une fonction de $L^2(\mathbb{R}^+)$	30
4.4	Approximation	31
4.5	Première formule d'intégration par parties (Itô)	31
4.6	Propriétés des intégrales de Wiener	33
4.7	Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck	34
5	Intégrale stochastique d'Itô	37
5.1	Cas des processus étagés	37
5.2	Temps d'arrêt. Martingales locales	42
5.2.1	Temps d'arrêt	43
5.2.2	Théorème d'arrêt	44
5.2.3	Martingale locale	48
5.3	Extension/généralisation de l'intégrale stochastique	53
5.4	Processus d'Itô	55

5.5	Cas multidimensionnel	59
6	Equations différentielles stochastiques	65
6.1	Introduction	65
6.2	Résultats préliminaires	66
6.2.1	Processus à valeurs matricielles	66
6.2.2	Processus d'Itô vectoriel	67
6.3	Existence et unicité de la solution	68
6.3.1	Position du problème	68
6.3.2	Existence et unicité trajectorielles dans le cas lipschitzien	69

Introduction

Le calcul stochastique est l'étude de phénomènes aléatoires dépendant du temps. L'objectif de ce cours est de donner des outils pour étudier des équations différentielles stochastiques (EDS), faisant intervenir à la fois le facteur temps et le facteur aléatoire et qui sont très utilisés dans différents domaines d'application tels qu'en biologie, en mathématiques financières, en mécanique quantique, en traitement du signal, en chimie, en météorologie et même en musique.

Chapitre 1

Quelques rappels sur les processus

Dans ce cours, $\mathcal{T}$ désignera un ensemble d'indices, représentant le temps. Classiquement, nous prendrons $\mathcal{T} = \mathbb{N}, \mathbb{R}^+, [a, b]$. On s'intéressera le plus souvent aux deux dernières situations, en s'appuyant sur des résultats ou notions analogues à ceux abordés dans le cas $\mathcal{T} = \mathbb{N}$. On notera alors $X = (X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ le processus aléatoire indexé par les t dans $\mathcal{T}$. Dans la suite, on se place sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1.1 Notion de processus

Définition 1.1. On appelle processus d'espace d'états $(E, \mathcal{E})$, toute famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ définies sur un même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.

Définition 1.2. Soit (E, d) un espace métrique et $\mathcal{E}$ sa tribu borélienne. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeur dans E . On dit que $(X_t)_{t \geq 0}$ est continu (ou à trajectoires continues) si pour tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto X_t(\omega)$ est continue.

Rappel :

1. La tribu borélienne sur un espace topologique E est la plus petite tribu sur E contenant tous les ensembles ouverts.
2. On appelle tribu $\mathcal{F}$ sur E , un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de E telles que :
 - (a) $\emptyset \in \mathcal{F}$
 - (b) si $A \in \mathcal{F}$, $A^c \in \mathcal{F}$
 - (c) si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathcal{F}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

1.2 Processus gaussiens

1.2.1 Variables aléatoires gaussiennes

Une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est gaussienne si et seulement si sa loi a pour densité

$$f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

avec $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sigma^2$.

Remarque 1.3. Une variable nulle $\mathbb{P}$ -p.s. est vue comme une variable aléatoire suivant une loi gaussienne centrée de variance nulle.

Proposition 1.4.

1. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
2. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, sa fonction caractéristique (=transformée de Fourier de sa loi) est :
 $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \exp\left\{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}$. La fonction caractéristique caractérise la loi d'une variable aléatoire.
3. Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, la transformée de Laplace de sa loi est :
 $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \Psi_X(\lambda) = \mathbb{E}[e^{\lambda X}] = \exp\left\{\lambda\mu + \frac{\sigma^2 \lambda^2}{2}\right\}$.

Preuve : en TD

1.2.2 Vecteur gaussien :

Définition 1.5. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que $X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien si toute combinaison linéaire de ses composantes suit une loi gaussienne, i.e. si pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n$ suit une loi gaussienne.

Un vecteur gaussien $X = (X_1, \dots, X_n)$ est entièrement déterminé par sa moyenne $\mu = \mathbb{E}(X) = (\mathbb{E}(X_1), \dots, \mathbb{E}(X_n))$ et sa matrice de covariance $\Sigma = \text{Cov}(X) = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Remarque 1.6. Si X est un vecteur gaussien, alors pour tout $i \in \{1 \dots n\}$, X_i est une variable aléatoire gaussienne. La réciproque est fautive : il existe des variables aléatoires gaussiennes $X_1, \dots, X_n$ telles que $X = (X_1, \dots, X_n)$ ne soit pas un vecteur gaussien.

Contre-exemple 1.7. Soient $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $a > 0$, alors si on pose $Y = \begin{cases} X & \text{si } |X| \leq a \\ -X & \text{si } |X| > a \end{cases}$, $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ (calculer sa fonction caractéristique), mais $X + Y = 2X1_{|X| \leq a}$ n'est pas une variables aléatoire gaussienne, donc (X, Y) n'est pas gaussien.

Théorème 1.8. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire de moyenne μ et de matrice de covariance Σ . Le vecteur est gaussien si et seulement si sa fonction caractéristique vaut :

$$\forall t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \Phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\langle t, X \rangle}] = \exp\left\{i\langle t, \mu \rangle - \frac{1}{2}\langle t, \Sigma t \rangle\right\}, \text{ avec } \langle t, m \rangle = t^T m.$$

Vecteurs gaussiens et indépendance :

Proposition 1.9. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur gaussien. Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes si et seulement si la matrice de covariance est diagonale ($\Leftrightarrow$ orthogonalité) : $\text{Cov}(X) = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2)$.

Preuve : $\Rightarrow$ Il est évident que si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, la matrice de covariance $(\text{Cov}(X_j, X_k))_{j,k=1,\dots,n}$ est diagonale.

$\Leftarrow$ Supposons que la matrice de covariance est diagonale. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON dans $\mathbb{R}^n$. La décomposition de X dans cette base est $X = \sum_{j=1}^n X_j e_j$. On a alors pour $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}$,

$$\text{Var}\left(\sum_{j=1}^n u_j X_j\right) = \sum_{j,k=1}^n u_j u_k \text{Cov}(X_j, X_k) = \sum_{j=1}^n u_j^2 \text{Var}(X_j).$$

On en déduit que pour $u = (u_1, \dots, u_n)$,

$$\begin{aligned}
 \Phi_{(X_1, \dots, X_n)}(u) &= \mathbb{E}[e^{i\langle u, X \rangle}] = \mathbb{E}\left[\exp\left(i \sum_{j=1}^n u_j X_j\right)\right] = \exp\left(i \sum_{j=1}^n u_j \mathbb{E}[X_j] - \frac{1}{2} \text{Var}\left(\sum_{j=1}^n u_j X_j\right)\right) \\
 &= \exp\left(i \sum_{j=1}^n u_j \mathbb{E}[X_j] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n u_j^2 \text{Var}(X_j)\right) \\
 &= \prod_{j=1}^n \exp\left(i u_j \mathbb{E}[X_j] - \frac{u_j^2}{2} \text{Var}(X_j)\right) \\
 &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[\exp(i u_j X_j)] = \prod_{j=1}^n \Phi_{X_j}(u_j).
 \end{aligned}$$

On obtient donc l'indépendance (la fonction caractéristique de la combinaison linéaire des X_i est le produit des fonctions caractéristiques des X_i). $\square$

△ L'hypothèse X vecteur gaussien est essentielle.

△ Les vecteurs gaussiens ne sont pas toujours à densité, mais si $\Sigma = \text{Cov}(X)$ est inversible, la loi de X admet la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ suivante :

$$f_{\mu, \Sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \Sigma}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left\langle x - \mu, \Sigma^{-1}(x - \mu) \right\rangle\right\}$$

1.2.3 Processus gaussien :

Définition 1.10. Un processus $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ est gaussien si pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}^n$, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien. On définit alors sa (fonction) moyenne μ par $\mu(t) := \mathbb{E}(X_t)$ et sa (fonction de) covariance Σ par $\Sigma(s, t) := \mathbb{E}[(X_s - \mu(s))(X_t - \mu(t))]$.

Remarque 1.11. La loi d'un processus étant caractérisée par ses lois fini-dimensionnelles, on en déduit que la loi d'un processus gaussien est caractérisée par sa fonction moyenne et sa fonction de covariance.

Proposition 1.12. Soient $s, t \in \mathcal{T}$ et $\Sigma(s, t)$ la fonction de covariance d'un processus gaussien $X = (X_t)_{t \geq 0}$. Alors :

1. $\Sigma(s, t)$ est symétrique : $\Sigma(s, t) = \Sigma(t, s)$
2. $\Sigma(s, t)$ est semi-définie positive : $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ et $\forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}^n$, $\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \Sigma(t_i, t_j) \alpha_j \geq 0$

Preuve :

1. La symétrie est claire.
2. $\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \Sigma(t_i, t_j) \alpha_j = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j \mathbb{E}[(X_{t_i} - \mu(t_i))(X_{t_j} - \mu(t_j))] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (X_{t_i} - \mu(t_i))\right)^2\right] \geq 0.$

$\square$

Proposition 1.13. Soient $\mu : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction (quelconque) et $\Sigma : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction symétrique, semi-définie positive. Il existe un processus gaussien (unique en loi) de moyenne μ et de fonction de covariance Σ .

Preuve : [cf. polycopié Probabilités avancées, Erick Herbin] **Appliquer le théorème de Kolmogorov.**

La preuve de ce résultat repose sur le résultat analogue pour les vecteurs gaussiens. On montre le résultat dans le cas où $\mu = 0$. On montre ainsi l'existence d'un processus gaussien centré $\{\tilde{X}_t; t \in \mathcal{T}\}$ de fonction de covariance Σ . Le processus final est défini par $X_t = \tilde{X}_t + \mu(t)$ pour tout $t \in \mathcal{T}$. Sans perte de généralité, on

suppose dans la suite $\mu = 0$. Pour tout sous-ensemble fini $I = \{t_1, \dots, t_n\}$ de $\mathcal{T}$, on considère la matrice Σ_I de taille $n \times n$ définie par

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \Sigma_I(i, j) = \Sigma(t_i, t_j).$$

La matrice Σ_I est symétrique et définie positive, donc on peut construire un vecteur gaussien Z_I de taille n suivant la loi $\mathcal{N}(0, \Sigma_I)$. En effet, soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormée dans laquelle Σ_I est diagonale : $\Sigma(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \lambda_i \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. On définit alors $Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}$ des variables aléatoires gaussiennes centrées, indépendantes et telles que $\text{Var}(Y_{t_j}) = \lambda_j$, $1 \leq j \leq n$. On pose alors $Z_I = \sum_{j=1}^n Y_{t_j} \varepsilon_j$ qui est un vecteur gaussien centré tel que $\Sigma_I(i, j) = \Sigma(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \lambda_i \delta_{ij}$.

On considère alors la mesure de probabilité μ_I sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu_I(A) = P_{Z_I}(A) = P(Z_I \in A).$$

μ_I est la loi de Z_I . Supposons maintenant $n > 1$ et posons $I_1 = \{t_1, t_2, \dots, t_{n-1}\}$. On a $I_1 \subset I$ et Z_{I_1} a la même loi que les $n-1$ premières coordonnées de Z_I . Il s'ensuit que

$$\forall A_1, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu_{I_1}(A_1 \times \dots \times A_{n-1}) = \mu_I(A_1 \times \dots \times A_{n-1} \times \mathbb{R}).$$

La famille de mesures de probabilité $(\mu_I; I \subset \mathcal{T} \text{ fini})$ vérifie donc les conditions de compatibilité du théorème d'extension de Kolmogorov. Il existe donc un processus $\{X_t; t \in \mathcal{T}\}$ dont les distributions fini-dimensionnelles sont les $(\mu_I; I \in \mathcal{T} \text{ fini})$. X est un processus gaussien de moyenne nulle et de fonction de covariance Σ . □

Rappel : Théorème d'extension de Kolmogorov

Supposons que $E = \mathbb{R}^N$ muni de la tribu borélienne $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

Toute famille $(\mu_I)_{I \subset \mathcal{T}}$ de probabilités sur $(E^I, \mathcal{E}^{\otimes I})$ indicée par les parties finies de $\mathcal{T}$ vérifiant la relation de compatibilité suivante : si I est une partie finie de $\mathcal{T}$ et si $t \in \mathcal{T} \setminus I$, alors

$$\forall A \in \mathcal{E}^{\otimes I}; \mu_{I \cup \{t\}}(A \times E) = \mu_I(A),$$

est la famille des distributions fini-dimensionnelles d'une (unique) probabilité sur $(E^{\mathcal{T}}, \mathcal{G})$.

Théorème 1.14. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus gaussien. Il y a équivalence entre

- i) le processus est stationnaire au sens strict $\Leftrightarrow \forall t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}^+, s \in \mathbb{R}^+, X_{t_1}, \dots, X_{t_n}$ a même loi que $X_{t_1+s}, \dots, X_{t_n+s}$
- ii) le processus est stationnaire à l'ordre 2 (ou au sens large) $\Leftrightarrow \mu(t) \equiv \mu, \forall t \geq 0$ et $\Sigma(s, t) = \gamma(t-s), \forall 0 \leq s \leq t$, où γ est une fonction quelconque.

Preuve : i) $\Rightarrow$ ii) toujours vrai.

ii) $\Rightarrow$ i) les processus gaussiens sont déterminés par μ et Σ . □

Définition 1.15. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus réel quelconque. On dit qu'il est à accroissements indépendants (PAI) si pour tout s, t tels que $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de $\sigma(X_u, 0 \leq u \leq s)$.

Proposition 1.16. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un PAI gaussien de moyenne $\mu(t)$ et de covariance $\Sigma(s, t)$. Alors :

1. $\Sigma(s, t) = \Sigma(t \wedge s, t \wedge s), \forall s, t \in \mathbb{R}^+$,
2. $\Sigma(t, t) - \Sigma(s, s) \geq 0, \forall s \leq t$.

Preuve : Pour simplifier, on centre le processus (sans perte de généralité) : $X_t \rightsquigarrow X_t - \mu(t), \forall t \geq 0$. Soit $t \geq s \geq 0$,

1. $\Sigma(s, t) = \mathbb{E}[X_s X_t] = \mathbb{E}[X_s(X_t - X_s + X_s)] = \mathbb{E}[X_s(X_t - X_s)] + \mathbb{E}[X_s^2] \stackrel{\text{PAI}}{=} \mathbb{E}(X_s)\mathbb{E}(X_t - X_s) + \Sigma(s, s) \stackrel{X \text{ centré}}{=} \Sigma(s, s)$, donc $\Sigma(s, t) = \Sigma(t \wedge s, t \wedge s)$.
2. $\Sigma(t, t) - \Sigma(s, s) = \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] \geq 0$. □

1.3 Espérances conditionnelles de variables aléatoires réelles

La plupart des preuves se trouvent dans le polycopié de 2^{ème} année de probabilités avancées.

Définition 1.17. Dans l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, soit X une variable aléatoire réelle dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On appelle *espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$* , la variable aléatoire réelle Y vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i) Y est dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, i.e. Y est $\mathcal{G}$ -mesurable;
- (ii) Pour tout $A \in \mathcal{G}$,

$$\begin{aligned} \int_A X d\mathbb{P} &= \int_A Y d\mathbb{P}, \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] &= \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_A], \\ \Leftrightarrow \mathbb{E}[XZ] &= \mathbb{E}[YZ], \quad \forall Z \text{ } \mathcal{G}\text{-mesurable bornée.} \end{aligned}$$

L'espérance conditionnelle est unique presque sûrement et notée $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

Définition 1.18. Soit X une variable aléatoire réelle dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. L'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$ est définie comme la variable aléatoire $Y \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ telle que

$$\forall Z \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P}) \quad \mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[YZ].$$

L'espérance conditionnelle est unique (modulo égalité dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) et notée $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$.

Remarque 1.19. Dans le cas particulier où $X \in \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ est la projection orthogonale de X sur le sous-espace $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.

Propriété 1.20. Soit X une variable aléatoire réelle dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (resp. $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$) et soit $\mathcal{G}$ un sous-tribu de $\mathcal{F}$. Alors

1. L'application $X \mapsto \mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ est linéaire dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (resp. $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$).
2. Si $X \geq 0$ p.s., alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$ p.s.
3. $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathcal{G})] = \mathbb{E}(X)$.
4. X $\mathcal{G}$ -mesurable $\Leftrightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = X$ p.s.
5. Si X est indépendante de $\mathcal{G}$, alors $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] = \mathbb{E}(X)$.

Proposition 1.21 (Emboîtement de tribus). Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$ telles que $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$. Alors, pour toute variable aléatoire X dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on a

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \quad \text{p.s.}$$

Remarque 1.22. Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathcal{G}$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par une variable aléatoire $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$. Alors on note $\mathbb{E}[X|Y]$ à la place de $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]$ et il existe une application borélienne $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\mathbb{E}[X|Y] = h(Y).$$

Preuve : Soit $A \in \mathcal{G} = \sigma(Y)$. Par définition de la tribu engendrée, il existe $B \in \mathcal{E}$ tel que $A = Y^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega, Y(\omega) \in B\}$ et on en déduit que $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B(Y)$. Par linéarité, toute fonction étagée $\mathcal{G}$ -mesurable s'écrit comme fonction étagée $\mathcal{E}$ -mesurable de Y . Par densité, si Z est une variable aléatoire réelle dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, Z s'écrit $Z = h(Y)$ où $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ application borélienne. En prenant $Z = \mathbb{E}[X|Y]$, on obtient le résultat. $\square$

Théorème 1.23. Soit $(Y_1, \dots, Y_n, X)$ un vecteur gaussien centré. Alors $\mathbb{E}(X|Y_1, \dots, Y_n)$ coïncide avec la projection orthogonale de X sur l'espace vectoriel engendré par $(Y_1, \dots, Y_n)$. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ réels tels que $\mathbb{E}(X|Y_1, \dots, Y_n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j$. De plus, pour toute fonction $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[h(X)|(Y_1, \dots, Y_n) = (y_1, \dots, y_n)] = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_{(\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \sigma^2)}(x) dx,$$

$$\text{où } \sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j)^2] \text{ et } f_{(\mu, \sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

La loi conditionnelle de X sachant $(Y_1, \dots, Y_n) = (y_1, \dots, y_n)$ est une loi gaussienne de moyenne

$$\mathbb{E}[X|(Y_1, \dots, Y_n) = (y_1, \dots, y_n)] = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j$$

et de variance

$$\sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j)^2].$$

Preuve : • Prenons $n = 1$. Cherchons $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $Z = X - \lambda Y$ soit indépendant de Y . (Z, Y) est obtenu à partir du couple gaussien centré (X, Y) , il est donc gaussien centré, donc on a l'équivalence suivante :

$$Z \perp\!\!\!\perp Y \Leftrightarrow \text{Cov}(Z, Y) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}[ZY] = 0.$$

Or

$$\mathbb{E}[ZY] = \mathbb{E}[XY] - \lambda \mathbb{E}[Y^2] = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\mathbb{E}[XY]}{\mathbb{E}[Y^2]} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(Y)} \in \mathbb{R}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|Y] &= \mathbb{E}[Z|Y] + \mathbb{E}[\lambda Y|Y] \\ &= \mathbb{E}[Z] + \lambda Y \quad \text{car } Z \perp\!\!\!\perp Y \\ &= \lambda Y \quad \text{car } \mathbb{E}[Z] = 0. \end{aligned}$$

• Montrons que $\mathbb{E}[X|Y_1, \dots, Y_n]$ coïncide avec la projection orthogonale de X sur l'espace vectoriel engendré par $\{Y_1, \dots, Y_n\}$. Notons $F = \text{Vect}\{Y_1, \dots, Y_n\}$ et $p_F(X)$ la projection orthogonale de X sur F (pour le produit scalaire associé à l'espérance). Alors $\mathbb{E}[(X - p_F(X))Z] = 0$ pour tout $Z \in F$. $(X - p_F(X), Y_1, \dots, Y_n)$ est gaussien centré. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X - p_F(X))Z] &= 0 \Rightarrow \text{Cov}(X - p_F(X), Z) = 0 \quad \forall Z \in F \\ &\Rightarrow X - p_F(X) \perp\!\!\!\perp (Y_1, \dots, Y_n), \end{aligned}$$

en prenant $Z = Y_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Donc en posant $U = X - p_F(X)$,

$$\begin{aligned} X &= \underbrace{U}_{\perp\!\!\!\perp F} + \underbrace{p_F(X)}_{\in F} \Rightarrow \mathbb{E}[X|Y_1, \dots, Y_n] = \underbrace{\mathbb{E}[U]}_{=0} + p_F(X) \\ &\Rightarrow \mathbb{E}[X|Y_1, \dots, Y_n] = p_F(X). \end{aligned}$$

• En pratique, $\mathbb{E}[X|Y_1, \dots, Y_n] = \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j$ où les λ_j pour $j = 1, \dots, n$ sont déterminés à partir de la condition d'orthogonalité

$$\forall j \quad \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X|Y_1, \dots, Y_n])Y_j] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[\left(X - \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j\right)Y_j\right] = 0.$$

- Posons $U = X - \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j$, alors $U \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 = \text{Var}(X - \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j)$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(X)|(Y_1, \dots, Y_n) = (y_1, \dots, y_n)] &= \int_{\mathbb{R}} h(u + \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j) \mu_{U|Y_1, \dots, Y_n}(du) \stackrel{U \perp (Y_1, \dots, Y_n)}{=} \int_{\mathbb{R}} h(u + \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j) \mu_U(du) \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(u + \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right) du \\ &\stackrel{v = u + \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j}{=} \int_{\mathbb{R}} h(v) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(v - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j)^2}{2\sigma^2}\right) dv. \end{aligned}$$

On en déduit que $X|(Y_1, \dots, Y_n) = (y_1, \dots, y_n) \sim \mathcal{N}(\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \sigma^2)$ avec $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j)^2]$. $\square$

1.4 Filtration, temps d'arrêt et martingales indexés par $\mathbb{N}$

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas où $\mathcal{T} = \mathbb{N}$.

1.4.1 Filtration

Définition 1.24. On appelle *filtration* de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une suite croissante $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$. On dit que $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$ est un *espace de probabilité filtré*.

Définition 1.25. Un processus $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dit *adapté* à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_n$.

Définition 1.26. Un processus $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dit *prévisible* pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si pour tout $n \geq 1$, X_n est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{n-1}$.

Exemple 1.27. Si $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un processus aléatoire, alors on peut définir pour tout $n \in \mathbb{N}$, la tribu

$$\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n).$$

C'est la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ qui rend X mesurable. La collection $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une filtration, appelée *filtration naturelle* de X . X est adapté à sa filtration naturelle.

1.4.2 Temps d'arrêt

Définition 1.28. Une variable aléatoire $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ est appelée *temps d'arrêt* pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \{T = n\} \in \mathcal{F}_n,$$

ou de manière équivalente si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n.$$

Exemple 1.29. Soit $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ un processus discret à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit le temps aléatoire T par

$$T(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) \geq 1\}.$$

T est un temps d'arrêt pour la filtration naturelle de X , car il ne dépend que des valeurs des X_n pour $n \leq T$. De manière rigoureuse, on peut écrire

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{0 \leq k \leq n} \underbrace{\{X_k \geq 1\}}_{\in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$$

En revanche, le temps aléatoire $S = \sup\{n : X_n \geq 1\}$ n'est pas un temps d'arrêt pour la filtration naturelle de X . Il est nécessaire de connaître l'ensemble des réalisations des X_n pour définir la valeur de S .

Définition 1.30. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et soit T un temps d'arrêt. La collection

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : \forall n \in \mathbb{N}, A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

est une tribu appelée tribu du temps d'arrêt T .

1.4.3 Martingales

Définition 1.31. On appelle martingale (resp. sous-martingale, surmartingale) le processus $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- (i) mesurabilité : X est adapté, i.e. X_n est $\mathcal{F}_n$ -mesurable pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) intégrabilité : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
- (iii) relation de martingale :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \quad p.s.$$

(resp. $X_n \leq \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ p.s., $X_n \geq \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ p.s.).

Remarque 1.32. La 3ème condition est équivalente à

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \text{ tels que } n \leq m, \quad X_n = \mathbb{E}[X_m | \mathcal{F}_n] \quad p.s.$$

Chapitre 2

Le mouvement brownien

Le mouvement brownien est associé à l'analyse de mouvements qui évoluent au cours du temps de manière si désordonnée qu'il semble difficile de prévoir leurs évolutions, même dans un intervalle de temps très court. Il joue un rôle central dans la théorie des processus stochastiques car dans de nombreux problèmes théoriques ou appliqués, le mouvement brownien ou les diffusions qui lui sont associées fournissent des modèles simples sur lesquels de nombreux calculs peuvent être faits.

Le mouvement brownien a été introduit en 1827 par le botaniste écossais Robert Brown (1773-1858) pour décrire le mouvement de fines particules organiques en suspension dans un gaz ou un fluide. En 1905, Albert Einstein construit un modèle probabiliste pour décrire le mouvement d'une particule qui diffuse : il trouve que la loi de la position à l'instant t de la particule sachant que l'état initial est x admet une densité qui vérifie l'équation de la chaleur et de ce fait est gaussienne. En 1923, Norbert Wiener construit rigoureusement la fonction aléatoire du mouvement brownien. Il établit que les trajectoires sont continues. Le français Paul Lévy découvre ensuite avec d'autres mathématiciens de nombreuses propriétés du mouvement brownien et introduit une première forme des équations différentielles stochastiques (EDS) dont l'étude sera ensuite systématisée par le japonais Kiyoshi Itô.

2.1 Définition, propriétés

Définition 2.1. On appelle mouvement brownien standard tout processus gaussien $B = (B_t)_{t \geq 0}$ à trajectoires continues, de fonction moyenne nulle et de fonction de covariance

$$\Sigma(s, t) = s \wedge t, \quad \forall s, t \geq 0. \quad (2.1)$$

Remarque 2.2. L'existence d'un mouvement brownien est assurée par la Proposition 1.13. En effet, la fonction de covariance (2.1) est symétrique : on remarque que $\Sigma(s, t) = \lambda([0, s] \cap [0, t])$, où λ désigne la mesure de Lebesgue.

Remarque 2.3. Si $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien, $\mathbb{E}(B_0) = 0 = \text{Var}(B_0)$, d'où $\mathbb{E}(B_0^2) = 0$ et $B_0 = 0$ $\mathbb{P}$ -p.s.

Définition 2.4. On dit que $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien issu de $x \in \mathbb{R}$ si pour tout $t \geq 0$, $Y_t = B_t + x$ avec $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien (issu de 0). De façon équivalente, $(Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien de fonction de covariance $\Sigma(s, t) = s \wedge t$ et de moyenne x .

Proposition 2.5. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. Alors

- i) Les accroissements de $(B_t)_{t \geq 0}$ sont indépendants, i.e. pour tous $0 \leq t_0 < \dots < t_n$, les variables $(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})_{0 \leq k \leq n-1}$ sont indépendantes.
- ii) Les accroissements de $(B_t)_{t \geq 0}$ sont stationnaires, i.e. pour tout $u > 0$, les variables $(B_{u+t} - B_t)_{t \geq 0}$ ont la même loi, à savoir $\mathcal{N}(0, u)$.

Preuve :

- i) Le processus $(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})_{0 \leq k \leq n}$ est un processus gaussien. Il suffit donc de vérifier que pour tous $0 \leq t_l < t_{l+1} < t_k < t_{k+1}$, $\mathbb{E}[(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})(B_{t_{l+1}} - B_{t_l})] = 0$.
- ii) Immédiat. $(B_{u+t} - B_t)$ est une variable aléatoire gaussienne et $\text{Var}(B_{u+t} - B_t) = u + t - 2\Sigma(u + t, t) + t = u + t - 2t + t = u$ $\square$

Remarque 2.6. La propriété i) est équivalente au fait que pour tout $u > 0$, les variables $(B_{u+t} - B_u)_{t \geq 0}$ est indépendante de la tribu $\sigma\{B_s, 0 \leq s \leq u\}$. De plus, le processus $(B_{u+t} - B_u)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.

Remarque 2.7. Le mouvement brownien standard admet donc deux caractérisations. Le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard si

i) ses trajectoires sont continues : $\omega \in \Omega, t \mapsto B_t(\omega)$ est continue

ii) $B_0 = 0$

iii) PAI tel que $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ | iii') processus gaussien centré de covariance $\Sigma(s, t) = s \wedge t$

Exercice 2.8.

1. Quelle est la loi de $B_t - B_s, 0 \leq s \leq t$? Donner sa densité.
2. Que vaut $\mathbb{E}[(B_t - B_s) | \sigma(B_u, 0 \leq u \leq s)]$?
3. Calculer $\mathbb{E}(B_t | B_s), \forall 0 \leq s \leq t$.

Proposition 2.9. Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. Les processus suivants sont également des mouvements browniens standards :

- i) $X_t^1 = -B_t, t \geq 0$ (propriété de symétrie)
- ii) $\forall \gamma > 0, X_t^2 = \frac{1}{\gamma} B_{\gamma^2 t}, t \geq 0$ (propriété d'auto-similarité)
- iii) $X_0^3 = 0$ et $X_t^3 = t B_{\frac{1}{t}}, t > 0$.

Preuve : À faire en exercice. $\square$

Proposition 2.10. On a

$$X_t^3 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0.$$

Remarque 2.11. Un mouvement brownien n'a pas de limite en $+\infty$, son comportement est en $\sqrt{t}$ ($\text{Var}(B_t) = t$).

2.2 Propriétés asymptotiques du mouvement brownien standard

Nous commençons par énoncer un résultat préliminaire.

Théorème 2.12 (Loi du 0 – 1 de Blumenthal). Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et $\mathcal{F}_t := \sigma\{B_s : s \leq t\}$ pour tout $t > 0$. On pose $\mathcal{F}_{0+} := \bigcap_{t > 0} \mathcal{F}_t$. Alors, pour tout $A \in \mathcal{F}_{0+}$, $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Preuve :

Soient $0 < t_1 < \dots < t_k, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée et $A \in \mathcal{F}_{0+}$. Par continuité (des trajectoires de B et sous le signe intégral), on a

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A g(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A g(B_{t_1} - B_\varepsilon, \dots, B_{t_k} - B_\varepsilon)].$$

Dès lors que $\varepsilon < t_1$, alors les variables $B_{t_1} - B_\varepsilon, \dots, B_{t_k} - B_\varepsilon$ sont indépendantes de $\mathcal{F}_\varepsilon$ (car B est un PAI), et comme $\mathcal{F}_{0^+} \subset \mathcal{F}_\varepsilon$, elles sont aussi indépendantes de $\mathcal{F}_{0^+}$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A g(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(A) \mathbb{E}[g(B_{t_1} - B_\varepsilon, \dots, B_{t_k} - B_\varepsilon)] \\ &= \mathbb{P}(A) \mathbb{E}[g(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})], \end{aligned}$$

et donc $\mathcal{F}_{0^+}$ est indépendante de $\sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_k})$. Ceci étant vrai pour toute famille finie $\{t_1, \dots, t_k\}$, on en déduit que $\mathcal{F}_{0^+}$ est indépendante de $\sigma(B_t, t > 0)$. Par continuité de B en 0, ($\lim_{t \rightarrow 0} B_t = B_0$), on a donc $\sigma(B_t, t > 0) = \sigma(B_t, t \geq 0)$ et comme $\mathcal{F}_{0^+} \subset \sigma(B_t, t \geq 0)$, on en déduit que $\mathcal{F}_{0^+}$ est indépendante d'elle-même. Cela entraîne que pour tout $A \in \mathcal{F}_{0^+}$, $\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)^2$ et comme $\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)$, on en déduit que $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. $\square$

Remarque 2.13. Il n'est a priori pas évident que $\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s$ soit mesurable : c'est le supremum non dénombrable de fonctions mesurables. Les trajectoires de B étant continues, on peut se restreindre aux valeurs rationnelles de $s \in [0, \varepsilon]$ et on obtient un supremum dénombrable de variables aléatoires. C'est ce que nous utiliserons implicitement dans la suite.

Proposition 2.14. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. Pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

- i) $\sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s > 0$ p.s. et $\inf_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s < 0$ p.s.
- ii) $\limsup_{t \rightarrow +\infty} B_t = +\infty$ p.s. et $\liminf_{t \rightarrow +\infty} B_t = -\infty$ p.s.

Preuve :

- i) Soit $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de limite nulle. L'événement $A := \cap_{n \geq 1} \{\sup_{m \geq n} B_{\varepsilon_m} > 0\}$ est clairement $\mathcal{F}_{0^+}$ -mesurable, donc $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$. Par ailleurs, $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\sup_{m \geq n} B_{\varepsilon_m} > 0)$ et $\mathbb{P}(\sup_{m \geq n} B_{\varepsilon_m} > 0) \geq \mathbb{P}(B_{\varepsilon_n} > 0) = 1/2$. D'où $\mathbb{P}(A) = 1$ et le premier point est prouvé.
- ii) D'après ce qui précède,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1, t \in \mathbb{Q}} B_t > 1/p\right) = 1.$$

D'après la proposition 2.9.ii), $(B_{p^2 t}/p)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien. Donc

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1, t \in \mathbb{Q}} B_t > 1/p\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq 1, t \in \mathbb{Q}} B_{p^2 t}/p > 1/p\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq p^2, t \in \mathbb{Q}} B_t > 1\right).$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, il vient $\mathbb{P}(\sup_{t \in \mathbb{Q}^+} B_t > 1) = 1$. Une nouvelle application de la proposition 2.9.ii) donne $\mathbb{P}(\sup_{t \in \mathbb{Q}^+} B_t > m) = 1$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. $\square$

Proposition 2.15. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. On a

- i) $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty$, $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty$ p.s.
- ii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{B_t}{t} = 0$ p.s.
- iii) $\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty$, $\liminf_{t \rightarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty$ p.s.

Corollaire 2.16. Presque sûrement, le mouvement brownien standard change une infinité de fois de signe sur $[0, t]$, $t > 0$.

Preuve : D'après la Proposition 2.14i), on peut construire une suite $(s_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ strictement décroissante, de limite 0 telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, B_{s_{2k-1}(\omega)}(\omega) > 0$ et $B_{s_{2k}(\omega)}(\omega) < 0$. $\square$

Corollaire 2.17.

- i) $\mathbb{P}$ -p.s., le mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ passe une infinité de fois par tout point.
- ii) Le mouvement brownien $(B_t)_{t \geq 0}$ n'est dérivable ni à droite, ni à gauche en tout point $s > 0$. Il est non dérivable à droite en $s = 0$.

Preuve :

- i) Raisonner par l'absurde, utiliser le fait que les trajectoires sont continues et la proposition 2.14.ii).
- ii) Si

$$\frac{B_t - B_0}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} \ell \quad (\text{dérivabilité à droite en } 0)$$

alors

$$\frac{B_t}{\sqrt{t}} = \frac{B_t}{t} \sqrt{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0,$$

ce qui est contradictoire. $\square$

Exercice 2.18. Le faire en tout point : $\frac{B_t - B_s}{t - s}$.

Remarque 2.19. En finance, on appelle mouvement brownien réel issu de $x \in \mathbb{R}$ de dérive $\theta \in \mathbb{R}$ et de variabilité $\sigma > 0$, le processus $X_t = x + \theta t + \sigma B_t$, où $(B_t)_{t \geq 0}$ est le mouvement brownien standard.

Exercice 2.20. Montrer que $(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien. Calculer sa moyenne et sa fonction de covariance.

2.3 Mouvement brownien par rapport à une filtration

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

2.3.1 Quelques définitions

Définition 2.21. On appelle filtration toute famille croissante $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$.

Remarque 2.22. $\mathcal{F}_t$ = "événements qui peuvent arriver avant t ".

On note $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité filtré.

Définition 2.23. On dit que le processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est $\mathcal{F}_t$ -adapté si $\forall t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable :

$$\forall t \geq 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad X_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}_t$$

Exemple 2.24 (Filtration "canonique", "naturelle", "propre" d'un processus). Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus, sa filtration canonique (naturelle ou propre) est définie par

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}.$$

Proposition 2.25. Un processus est toujours adapté à sa filtration canonique.

Définition 2.26. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus. On dit que X est

1. une $\mathcal{F}_t$ - $\mathbb{P}$ -martingale si :

- (a) X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable ($\Leftrightarrow X$ est $\mathcal{F}_t$ -adapté)
- (b) $\mathbb{E}[|X_t|] < +\infty \quad \forall t \geq 0$ ($\Leftrightarrow X \in \mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, intégrabilité)
- (c) $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, \quad \forall t \geq s,$
- 2. une $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -sous-martingale si : (a), (b) et (c') $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s, \quad \forall t \geq s,$
- 3. une $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -sur-martingale si : (a), (b) et (c'') $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s, \quad \forall t \geq s.$

Exemple 2.27. Le mouvement brownien standard $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -martingale pour sa filtration propre, $\mathcal{F}_t^B = \sigma\{B_u, 0 \leq u \leq t\}$:

- 1. Ok (un processus est toujours mesurable par rapport à sa filtration propre),
- 2. $\mathbb{E}[|B_t|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{t},$
- 3. $\mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s^B] - B_s = \mathbb{E}[(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s^B] = \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0.$

2.3.2 $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -mouvement brownien

Définition 2.28. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un processus réel adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Alors $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -mouvement brownien réel standard si :

- 1. $B_0 = 0,$
- 2. les trajectoires sont continues,
- 3. $\forall 0 \leq s \leq t, B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$

Remarque 2.29. $\mathcal{F}_t$ n'est pas forcément la filtration propre de B .

Proposition 2.30. Un $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien est un mouvement brownien pour sa filtration propre.

Proposition 2.31. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus réel adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, nul en 0 et à trajectoires continues. Alors

$$\begin{aligned} & X \text{ est un } \mathcal{F}_t - \mathbb{P} - \text{mouvement brownien standard} \\ \Leftrightarrow & \forall a \in \mathbb{R}, \quad Z_t^a = \exp\left(iaX_t + \frac{1}{2}a^2t\right) \text{ est une } \mathcal{F}_t - \mathbb{P} - \text{martingale.} \end{aligned}$$

Preuve : $\Rightarrow$ Soit X un $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -mouvement brownien. Soit

$$Z_t^a = \exp\left(iaX_t + \frac{1}{2}a^2t\right), \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Montrons que c'est une $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -martingale.

- 1. Z_t^a est $\mathcal{F}_t$ -mesurable car l'image par l'application continue $\exp(ia.) \exp(\frac{1}{2}a^2t)$ d'un processus mesurable est mesurable,
- 2. $\mathbb{E}[|Z_t^a|] = \mathbb{E}\left[\left|\exp\left(iaX_t + \frac{1}{2}a^2t\right)\right|\right] = e^{\frac{a^2}{2}t} < +\infty,$
- 3. Montrons que $\mathbb{E}[(Z_t^a - Z_s^a) | \mathcal{F}_s] = 0, \quad \forall 0 \leq s \leq t.$

$$\begin{aligned} Z_t^a - Z_s^a &= \exp\left(iaX_t + \frac{a^2t}{2}\right) - \exp\left(iaX_s + \frac{a^2s}{2}\right) \\ &= \exp\left(iaX_s + \frac{a^2s}{2}\right) \left[\exp\left(ia(X_t - X_s) + \frac{a^2}{2}(t - s)\right) - 1 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(Z_t^a - Z_s^a)|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(iaX_s + \frac{a^2 s}{2}\right)\left[\exp\left(ia(X_t - X_s) + \frac{a^2}{2}(t-s)\right) - 1\right]|\mathcal{F}_s\right] \\
&= Z_s^a \mathbb{E}\left[\exp\left(ia(X_t - X_s) + \frac{a^2}{2}(t-s)\right) - 1|\mathcal{F}_s\right] \\
&\stackrel{X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s}{=} Z_s^a \left(\mathbb{E}\left[\exp\left(ia(X_t - X_s) + \frac{a^2}{2}(t-s)\right)\right] - 1\right)
\end{aligned}$$

$\mathbb{E}[\exp(ia(X_t - X_s))]$ est la fonction caractéristique de $X_t - X_s$ et $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, on a donc

$$\mathbb{E}[\exp(ia(X_t - X_s))] = e^{-\frac{a^2}{2}(t-s)}.$$

On obtient donc finalement

$$\mathbb{E}[(Z_t^a - Z_s^a)|\mathcal{F}_s] = 0.$$

$\Leftarrow$ Supposons que $\forall a \in \mathbb{R}$, Z_t^a est une $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -martingale. On a donc :

$$\mathbb{E}[\exp(ia(X_t - X_s))|\mathcal{F}_s] = e^{-\frac{a^2}{2}(t-s)}$$

et en passant à l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}[\exp(ia(X_t - X_s))] = e^{-\frac{a^2}{2}(t-s)},$$

donc $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ (car on reconnaît la fonction caractéristique d'une loi $\mathcal{N}(0, 1)$). Soit enfin $a, b \in \mathbb{R}$ et Y une variable aléatoire $\mathcal{F}_s$ -mesurable alors d'après la propriété martingale, on en déduit que

$$\mathbb{E}[\exp(ia(X_t - X_s) + ibY)|\mathcal{F}_s] = e^{-\frac{a^2}{2}(t-s)} e^{ibY}$$

en prenant l'espérance, on obtient

$$\Phi_{(X_t - X_s, Y)}(a, b) = \mathbb{E}[\exp(ia(X_t - X_s) + ibY)] = \mathbb{E}[e^{ia(X_t - X_s)}] \mathbb{E}[e^{ibY}].$$

On en déduit que pour toute variable aléatoire Y $\mathcal{F}_s$ -mesurable, $X_t - X_s$ est indépendante de Y donc $X_t - X_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s$. X vérifie les trois caractérisations d'un $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -mouvement brownien standard, c'est donc un $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -mouvement brownien standard. □

Proposition 2.32. Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -mouvement brownien standard. Alors

1. B_t^2 est une $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -sous-martingale,
2. $B_t^2 - t$ est une $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -martingale.

Preuve :

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe. On peut donc appliquer l'inégalité de Jensen :

$$\mathbb{E}[B_t^2|\mathcal{F}_s] \geq (\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s])^2 = B_s^2,$$

car B_t est un $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -martingale.

2. On a

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s \\
& \Leftrightarrow \mathbb{E}[B_t^2 - 2B_s B_t + B_s^2 | \mathcal{F}_s] = t - s \\
& \Leftrightarrow \mathbb{E}[B_t^2 | \mathcal{F}_s] - 2\mathbb{E}[B_s B_t | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s^2 | \mathcal{F}_s] = t - s \\
& \Leftrightarrow \mathbb{E}[B_t^2 | \mathcal{F}_s] - 2B_s \mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s] + B_s^2 = t - s \\
& \Leftrightarrow \mathbb{E}[B_t^2 | \mathcal{F}_s] - B_s^2 = t - s \\
& \Leftrightarrow \mathbb{E}[(B_t^2 - t) | \mathcal{F}_s] = B_s^2 - s
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.33. On dit que t est le processus croissant associé à la martingale B_t , il est tel que $B_t^2 - t$ soit une martingale.

Plus généralement : Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -martingale à trajectoires continues, il existe un processus croissant unique, adapté, partant de 0, noté $\langle M \rangle = (\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ tel que $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ soit une $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -martingale ($\langle B \rangle_t = t$).

Exercice 2.34. Soit $X_t = B_t^2$, avec $B = (B_t)_{t \geq 0}$ le mouvement brownien standard. On définit la filtration naturelle de B par $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_u, 0 \leq u \leq t\}$.

1. Quelle est la loi de X_t ? Donner son espérance, sa variance et sa covariance.
2. Est-ce un processus gaussien ?
3. Est-ce une $\mathcal{F}_t$ -martingale ?

Chapitre 3

Intégrales de processus gaussiens à trajectoires continues

3.1 Quelques résultats préliminaires

Proposition 3.1. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus à trajectoires continues. Alors

$$Y: \begin{array}{ccc} (\Omega \times \mathbb{R}^+, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ (\omega, t) & \mapsto & X_t(\omega) \end{array}$$

est mesurable par rapport au couple (ω, t) :

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad Y^{-1}(A) \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+).$$

Preuve : On pose

$$X_t^n(\omega) = X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \quad \text{si} \quad t \in \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right], \quad k \in \mathbb{N}$$

On a alors

$$X_t^n(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]}(t),$$

qui est mesurable par rapport au couple (ω, t) comme produit de deux fonctions mesurables par rapport à chaque variable. Donc $(\omega, t) \mapsto X_t^n(\omega)$ définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$ est mesurable pour $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. On a $X_t^n(\omega) = X_{t_n}(\omega) = Y(\omega, t_n)$ avec $t_n = [2^n t]/2^n$. Or $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} t$ et comme X est un processus à trajectoires continues, on en déduit que $X_{t_n}(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X_t(\omega)$ pour tout $(t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$. Une limite simple de fonctions mesurables étant mesurable, la même propriété de mesurabilité reste vraie pour l'application $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega) = Y(\omega, t)$ définie sur $\Omega \times \mathbb{R}^+$. Et donc Y est mesurable en (ω, t) . $\square$

Proposition 3.2. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus gaussien à trajectoires continues. Alors :

- $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mu(t) = \mathbb{E}(X_t) \end{array}$
 - et $\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (s, t) & \mapsto & \Sigma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) \end{array}$
- sont continues.

une variable aléatoire gaussienne car X est un processus gaussien, donc toute combinaison linéaire finie de ses composantes est une variable aléatoire gaussienne. On a $Z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} Z_t$ p.s., donc Z_t est une variable aléatoire gaussienne (car la convergence p.s. implique la convergence en loi). Il nous faut encore montrer que $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien : $\forall a_1, \dots, a_n, t_1, \dots, t_n, \sum_{i=1}^n a_i Z_{t_i}$ peut s'écrire comme la limite d'une variable aléatoire gaussienne, c'est donc une gaussienne et on en déduit que $(Z_t)_{t \geq 0}$ est bien un processus gaussien.

Calcul de $\mathbb{E}(Z_t)$ et $\mathbb{E}(Z_s Z_t)$: 2 méthodes

1. comme limites de $\mathbb{E}(Z_{t_n})$ et $\mathbb{E}(Z_{s_n} Z_{t_n})$
2. en utilisant le théorème de Fubini

Nous allons appliquer la 2ème méthode et appliquer le théorème de Fubini.

• $\mathbb{E}(Z_t) = \mathbb{E}\left[\int_0^t f(s) X_s ds\right] = \int_{\Omega} \left(\int_0^t f(s) X_s(\omega) ds\right) d\mathbb{P}(\omega)$ Pour pouvoir intervertir les deux intégrales, il faut vérifier que l'intégrale double est absolument convergente :

$$\int_0^t \left(\int_{\Omega} |f(s) X_s(\omega)| d\mathbb{P}(\omega) \right) ds < +\infty \quad \text{car} \quad \mathbb{E}(|X_s|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\text{Var}(X_s))^{1/2} < +\infty.$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini et on a donc bien

$$\mathbb{E}(Z_t) = \int_0^t f(s) \mathbb{E}(X_s) ds.$$

• On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_s Z_t) &= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^s f(u) X_u du\right) \left(\int_0^t f(v) X_v dv\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{0 \leq u \leq s} \int_{0 \leq v \leq t} f(u) f(v) X_u X_v du dv\right] \end{aligned}$$

On peut facilement montrer que $|f(u)| |f(v)| |X_u X_v|$ est mesurable sur un pavé et donc

$$\mathbb{E}\left[\int_{0 \leq u \leq s} \int_{0 \leq v \leq t} |f(u)| |f(v)| |X_u X_v| du dv\right]$$

existe bien. Il reste à vérifier qu'elle est finie. Or

$$\mathbb{E}(|X_u X_v|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(|X_u|^2) \mathbb{E}(|X_v|^2)} < +\infty.$$

L'intégrale est donc absolument convergente et par le théorème de Fubini, on peut intervertir l'espérance et les intégrales :

$$\mathbb{E}(Z_s Z_t) = \int_{0 \leq v \leq t} \int_{0 \leq u \leq s} f(u) f(v) \mathbb{E}[X_u X_v] du dv.$$

□

Calcul de la covariance :

$$\text{Cov}(Z_s, Z_t) = \int_{0 \leq v \leq t} \int_{0 \leq u \leq s} f(u) f(v) \text{Cov}(X_u, X_v) du dv.$$

Exercice 3.4. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus gaussien à trajectoires continues. Soient $f, g, h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. Soit

$$Y_t = f(t) + g(t) \int_0^t h(s) X_s ds.$$

1. Montrer que $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien à trajectoires continues.

2. Calculer $\mu(t) = \mathbb{E}(Y_t)$ et $\text{Cov}(Y_s, Y_t)$.

Exercice 3.5. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. Quelle est la loi jointe de $(B_t, \int_0^t B_s ds)$?

Exercice 3.6. Soient $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard et $Z_t = B_t - tB_1$ pour $0 \leq t \leq 1$ (on appelle ce processus le pont brownien).

1. Montrer que Z est un processus gaussien indépendant de B_1 .
2. Calculer $\mathbb{E}(Z_t)$ et $\text{Cov}(Z_s, Z_t)$.

Chapitre 4

Intégrale de Wiener

4.1 Quelques définitions et résultats préliminaires

Soient $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ et $B = (B_t)_{t \geq 0}$ le mouvement brownien standard. On va définir l'intégrale de Wiener par

$$" \int_0^t f(s) dB_s ".$$

Remarque 4.1. Si B était à variation finie (ou bornée), ce serait une intégrale de Stieljes.

Définition 4.2. Soient $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ une partition de $[a, b]$. La variation de g sur $[a, b]$ pour la subdivision σ est

$$V(g, \sigma) = \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})|$$

et on définit $V_{a,b}(g) = \sup_{\sigma} V(g, \sigma)$. On dit que g est à variation finie si $V_{a,b}(g) < +\infty$.

Définition 4.3. Soient $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation finie. On définit alors l'intégrale de Stieljes par

$$\int_a^b f(s) dg(s) = \lim_{\text{pas } \sigma \searrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) [g(x_i) - g(x_{i-1})], \quad \text{avec } \text{pas } \sigma = \sup_{i=1, \dots, n} |x_i - x_{i-1}|.$$

Mais B n'est pas à variation finie, ce n'est donc pas une intégrale de Stieljes.

Proposition 4.4. Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ le mouvement brownien standard. On a

$$\sum_{i=1}^{2^n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{L}^2 \text{ et p.s.}} t, \quad \text{où } t_i = \frac{it}{2^n}.$$

Preuve : • On commence par montrer la convergence dans L^2 :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{2^n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 - t\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{2^n} (|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 - (t_i - t_{i-1}))\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{2^n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 - \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{2^n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2\right]\right)^2\right] \\
&= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{2^n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2^n} \left(\mathbb{E}[|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^4] - (\mathbb{E}[|B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2])^2\right) \\
&= \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{3t^2}{2^{2n}} - \frac{t^2}{2^{2n}}\right) \quad \text{car } \mathbb{E}[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4] = \frac{3t^2}{2^{2n}} \\
&= \frac{2t^2}{2^n}.
\end{aligned}$$

On vient donc de prouver la convergence dans L^2 .

• Soit $\varepsilon > 0$, on a d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{2^n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 - t\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\text{Var}(\sum_{i=1}^{2^n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2)}{\varepsilon^2} = \frac{2t^2}{2^n \varepsilon^2},$$

car $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{2^n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2] = t$ et $\text{Var}(\sum_{i=1}^{2^n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2) = \frac{2t^2}{2^n}$. Donc $\sum_n \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{2^n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 - t\right| > \varepsilon\right)$ converge et d'après le lemme de Borel-Cantelli, $(\sum_n \mathbb{P}(A_n) < +\infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup A_n) = 0)$,

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left|\sum_{i=1}^{2^n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 - t\right| > \varepsilon\right) = 0$$

($\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{m \geq n} \left|\sum_{i=1}^{2^m} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 - t\right| > \varepsilon\right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$). On en déduit la convergence presque sûre.

Remarque 4.5. Il en découle que le mouvement brownien n'est p.s. pas à variations finies. En effet, si $V(B, [0, t]) < +\infty$, alors $\sup_{\sigma} \sum_{i=1}^{2^n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}| < +\infty$. Ceci implique que

$$\sum_{i=1}^{2^n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|^2 \leq \underbrace{\sup_{i=1, \dots, 2^n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{2^n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}|}_{< +\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{f.}.$$

Une fonction à variation quadratique non nulle ne peut pas être à variation finie.

4.2 Intégrales des fonctions en escalier

Définition 4.6. Une fonction en escalier à support compact de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ est telle que

$$f(t) = \sum_{i=1}^N f_i \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i[}(t), \quad \text{avec } t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N < +\infty \quad \text{et } f_i \text{ constantes } \forall i.$$

Soit l'espace vectoriel $E = \{f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ fonction en escalier à support compact}\}$.

- E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$:

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^N f_i \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i[}(t) \right)^2 dt \\ &= \sum_{i=1}^N \int_0^{+\infty} f_i^2 \mathbb{1}_{[t_{i-1}, t_i[}^2(t) dt \quad (\text{intervalles disjoints}) \\ &= \sum_{i=1}^N f_i^2 (t_i - t_{i-1}) < +\infty. \end{aligned}$$

- E est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$.

Définition 4.7. Soit $f \in E$, on définit

$$I(f) = \int_0^{+\infty} f(s) dB_s = \sum_{i=1}^N f_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}).$$

Proposition 4.8. $I(f)$ est une variable aléatoire gaussienne, centrée, de variance

$$\mathbb{E}[(I(f))^2] = \int_0^{+\infty} |f^2(s)| ds = \|f\|_2^2.$$

Preuve :

- $I(f) = \sum_{i=1}^N f_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_j \alpha_j B_{t_j}$ (combinaison linéaire d'un processus gaussien) est une variable aléatoire gaussienne.

- $\mathbb{E}[I(f)] = 0 (= \sum_j \alpha_j \mathbb{E}[B_{t_j}])$

- Enfin, on a

$$\begin{aligned} \text{Var}[I(f)] &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N f_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})\right) \\ &= \sum_{i=1}^N f_i^2 \text{Var}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= \sum_{i=1}^N f_i^2 (t_i - t_{i-1}) \\ &= \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

□

Propriété 4.9. L'application $\begin{matrix} E & \rightarrow & \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ f & \mapsto & I(f) \end{matrix}$ est donc une isométrie : $\mathbb{E}[(I(f))^2] = \|f\|_2^2$.

Propriété 4.10. I est linéaire : $f, g \in E, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow I(\lambda f + \mu g) = \lambda I(f) + \mu I(g)$.

Propriété 4.11. Pour tout $g_1, \dots, g_k \in E$,

$$\left(\int_0^{+\infty} g_1(s) dB_s, \dots, \int_0^{+\infty} g_k(s) dB_s \right)$$

est un vecteur gaussien centré de covariance

$$\text{Cov}(I(g_k), I(g_l)) = \int_0^{+\infty} g_k(s) g_l(s) ds = \langle g_k, g_l \rangle_{\mathbb{L}^2}.$$

Preuve : À faire en exercice.

4.3 Intégrales de Wiener d'une fonction de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$

Définition 4.12. Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$, on définit

$$I(f) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} f(s) dB_s := \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(s) dB_s,$$

où $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de E telle que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{L}^2} f$.

Proposition 4.13. $I(f)$ est une variable aléatoire gaussienne, centrée, de variance $\text{Var}(I(f)) = \|f\|_2^2$ et si $f, g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$

$$\text{Cov}(I(f), I(g)) = \mathbb{E}[I(f)I(g)] = \int_0^{+\infty} f(s)g(s)ds = \langle f, g \rangle_{\mathbb{L}^2}.$$

Preuve : Soit $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$, alors comme E est dense dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de E ($f_n \in E, \forall n \in \mathbb{N}$), telle que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{L}^2} f$, i.e. $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. Soit $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}[(I(f_n) - I(f_m))^2] = \mathbb{E}[(I(f_n - f_m))^2] = \|f_n - f_m\|_2^2 \xrightarrow[n, m \rightarrow +\infty]{} 0,$$

la limite vers 0 vient du fait que $\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ qui est complet. La suite $(I(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ qui est complet, donc la suite $(I(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $I(f)$ gaussienne (comme limite de gaussienne), centrée car $\mathbb{E}[I(f_n)] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathbb{E}[I(f)]$, enfin

$$\text{Var}(I(f)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Var}(I(f_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

□

On a donc prolongé $I(f)$ à $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+) & \rightarrow & \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \\ f & \mapsto & I(f) = \int_0^{+\infty} f(s) dB_s \end{array}$$

linéaire, isométrique, $I(f) \sim \mathcal{N}(0, \|f\|_2^2)$ et $\mathbb{E}[I(f)I(g)] = \langle f, g \rangle_{\mathbb{L}^2}$.

Plus généralement, si $f \in \mathbb{L}_{Loc}^2(\mathbb{R}^+)$ ($\Leftrightarrow \int_0^t |f(s)|^2 ds < +\infty, \forall t \geq 0$), on définit pour tout $t \geq 0$

$$\int_0^t f(s) dB_s = \int_0^{+\infty} f(s) \mathbb{1}_{]0, t]}(s) dB_s.$$

Si on pose $g_{(t)}(s) = f(s) \mathbb{1}_{]0, t]}(s) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$, on a :

$$\int_0^{+\infty} |g_{(t)}(s)| ds = \int_0^t |f(s)| ds < +\infty,$$

on en déduit que pour un t fixé,

$$\int_0^t f(s) dB_s \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t |f(s)|^2 ds\right),$$

et pour tout $s, t \geq 0$,

$$\text{Cov}\left(\int_0^t f(u) dB_u, \int_0^s g(v) dB_v\right) = \int_0^{s \wedge t} f(u)g(u) du.$$

En particulier,

$$\int_0^{s \wedge t} f(u)g(u) du = 0 \Rightarrow \int_0^t f(u) dB_u \text{ et } \int_0^t g(v) dB_v \text{ indépendantes (car gaussiennes).}$$

4.4 Approximation

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Proposition 4.14. $\sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{L}^2} \int_0^t f(s)dB_s, \quad t_i = \frac{it}{n}.$

Rappel : f continue $\Rightarrow \int_0^t |f(s)|^2 ds < +\infty, \quad \forall t \geq 0.$

Preuve : Posons

$$\omega\left([0, t], f, \frac{t}{n}\right) = \sup_{\substack{0 \leq s, s' \leq t \\ |s-s'| \leq \frac{t}{n}}} |f(s) - f(s')| = \omega_n$$

f continue sur $[0, t] \Rightarrow f$ uniformément continue sur $[0, t] \Rightarrow \omega_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$ On peut écrire

$$\sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) - \int_0^t f(s)dB_s = \int_0^t (f_n(s) - f(s))dB_s,$$

où

$$f_n(s) = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{(i-1)t}{n}\right) \mathbb{1}_{\left]\frac{(i-1)t}{n}, \frac{it}{n}\right]}(s) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) - \int_0^t f(s)dB_s\right)^2\right] & \stackrel{\text{isométrie}}{=} \int_0^t |f_n(s) - f(s)|^2 ds \\ & \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t_{i-1}) - f(s)|^2 ds \\ & \leq \omega_n^2 \times n \times \frac{t}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

□

4.5 Première formule d'intégration par parties (Itô)

Proposition 4.15. Soit $t \geq 0$ fixé. Soit f de classe C^1 sur $[0, t]$. Alors

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds.$$

Preuve : $\int_0^t f(s)dB_s$ est bien une intégrale de Wiener car f est C^1 donc $f \in L_{Loc}^2(\mathbb{R}^+)$, $\int_0^t f'(s)B_s ds$ intégrale du processus gaussien à trajectoire continue $f'(s)B_s$. Soit

$$f_n(s) = \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}) \mathbb{1}_{\left]t_{i-1}, t_i\right]}(s), \quad t_i = \frac{it}{n}.$$

Par isométrie de l'intégrale de Wiener et le résultat d'approximation, on a

$$\int_0^t |f_n(s) - f(s)|^2 ds = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f_n(s)dB_s - \int_0^t f(s)dB_s\right)^2\right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned}\int_0^t f_n(s)dB_s &= \sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \\ &= f(0)(B_{t_1} - B_0) + f(t_1)(B_{t_2} - B_{t_1}) + \cdots + f(t_{n-1})(B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \\ &= B_{t_1}(f(0) - f(t_1)) + B_{t_2}(f(t_1) - f(t_2)) + \cdots + B_{t_{n-1}}(f(t_{n-2}) - f(t_{n-1})) + f(t_{n-1})B_{t_n}.\end{aligned}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned}f\left(\frac{(n-1)t}{n}\right) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t) \quad \text{car } f \text{ est de classe } C^1 \\ B_{t_n} &= B_t,\end{aligned}$$

et on peut écrire

$$(f(t_{i-1}) - f(t_i))B_{t_i} = -\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(s)ds\right)B_{t_i}.$$

On trouve donc

$$\int_0^t f_n(s)dB_s = \underbrace{f(t_{n-1})B_{t_n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t)B_t} - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} (f'(s)B_{t_i})ds.$$

Il reste à montrer que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(s)B_{t_i}ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^t f'(s)B_sds \quad \text{p.s.}$$

On a

$$\begin{aligned}\int_0^t f'(s)B_sds - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(s)B_{t_i}ds &= \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(s)(B_s - B_{t_i})ds + \int_{t_{n-1}}^t f'(s)B_sds \\ \Rightarrow \left| \int_0^t f'(s)B_sds - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(s)B_{t_i}ds \right| &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(s)| |B_s - B_{t_i}|ds + \int_{t_{n-1}}^t |f'(s)B_s|ds \\ &\leq \underbrace{\sup_{\substack{s \in [t_{i-1}, t_i] \\ i=1, \dots, n}} |B_s - B_{t_i}|}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \underbrace{\int_0^{t_{n-1}} |f'(s)|ds}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^t |f'(s)|ds < +\infty} + \underbrace{\int_{t_{n-1}}^t |f'(s)B_s|ds}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}\end{aligned}$$

par continuité de B . On conclut que

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_sds.$$

□

Corollaire 4.16. $t \mapsto \int_0^t f(s)dB_s$ est à trajectoires continues.

Exemple 4.17. La formule d'Itô est souvent utilisée à l'envers :

$$\int_0^t sB_sds = \frac{t^2}{2}B_t - \int_0^t \frac{s^2}{2}dB_s = \int_0^t \left(\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2}\right)dB_s.$$

Exercice 4.18. Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. Soit

$$X = \int_0^1 t dB_t \quad \text{et} \quad Y = \int_0^1 t^2 dB_t.$$

Déterminer la loi jointe de (X, Y) .

Exercice 4.19. Soient $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard et $Z_t = B_t - tB_1$, avec $0 \leq t \leq 1$. On note $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$.

1. $Z = (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}$ est-il $\mathcal{F}_t$ -adapté?
2. Montrer que B_1 et $\int_0^1 Z_u du$ sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes. Calculer la loi de $\int_0^1 Z_u du$.

4.6 Propriétés des intégrales de Wiener

Soit $B = (B_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -mouvement brownien standard. Soit $f \in \mathbb{L}_{Loc}^2(\mathbb{R}^+)$. On définit

$$I(f) = \int_0^t f(s) dB_s \left(= \lim_{n \rightarrow +\infty, \mathbb{L}^2} \underbrace{\sum_{i=1}^n f(t_{i-1})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})}_{\text{quantités qui sont toutes } \mathcal{F}_t\text{-mesurables}}, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t \right),$$

$I(f)$ est donc adapté.

Proposition 4.20. Soit $f \in \mathbb{L}_{Loc}^2(\mathbb{R}^+)$, de classe C^1 . Soit $M_t^f = \int_0^t f(s) dB_s$.

1. $(M_t^f)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien à trajectoires continues tel que

$$\mu(t) = \mathbb{E}(M_t^f) = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma(s, t) = \text{Cov}(M_t^f, M_s^f) = \int_0^{s \wedge t} f^2(u) du.$$

2. $(M_t^f)_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -martingale.
3. $\forall a \in \mathbb{R}, Z_t^a = \exp\left(aM_t^f - \frac{a^2}{2} \int_0^t f^2(s) ds\right)$ est une $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -martingale.

Preuve :

1. Soient $0 \leq t_1 < \dots < t_n, a_1$ et $\dots, a_n \in \mathbb{R}$, alors $\sum_{i=1}^n a_i M_{t_i}^f = \lim \sum \alpha_j B_{t_j}$ est bien une variable aléatoire gaussienne car B est un processus gaussien. La formule d'intégration par parties implique que les trajectoires sont continues :

$$M_t^f = B_t f(t) - \int_0^t B_s f'(s) ds.$$

2. (i) M_t^f est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.
(ii) $\mathbb{E}[|M_t^f|] \stackrel{\text{C-S}}{\leq} \sqrt{t} (\mathbb{E}[|M_t^f|^2])^{1/2} = \sqrt{t} \|f\|_2$ par isométrie, donc M_t^f est bien intégrable.
(iii) Soient $0 \leq s \leq t, \mathbb{E}[M_t^f - M_s^f | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\int_s^t f(u) dB_u \middle| \mathcal{F}_s\right]$. On peut approcher f par une suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en escaliers dans $\mathbb{L}^2$ et on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_s^t f_n(u) dB_u = \int_s^t f(u) dB_u,$$

dans $\mathbb{L}^2$ donc dans $\mathbb{L}^1$. On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[\int_s^t f_n(u) dB_u \middle| \mathcal{F}_s\right] - \mathbb{E}\left[\int_s^t f(u) dB_u \middle| \mathcal{F}_s\right]\right|\right] &= \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[\int_s^t (f_n(u) - f(u)) dB_u \middle| \mathcal{F}_s\right]\right|\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left|\mathbb{E}\left[\int_s^t (f_n(u) - f(u)) dB_u \middle| \mathcal{F}_s\right]\right|\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left|\int_s^t f_n(u) dB_u - \int_s^t f(u) dB_u\right|\right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E} \left[\int_s^t f_n(u) dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{L}^1} \mathbb{E} \left[\int_s^t f(u) dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right].$$

Or on a pour $s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t$,

$$\mathbb{E}[I(f_n) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^N f_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \sum_{i=1}^N f_i \underbrace{\mathbb{E}[B_{t_i} - B_{t_{i-1}} | \mathcal{F}_s]}_{\Pi \mathcal{F}_s} = \sum_{i=1}^N f_i \mathbb{E}[B_{t_i} - B_{t_{i-1}}] = 0.$$

On en déduit que $\mathbb{E}[M_t^f - M_s^f | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E} \left[\int_s^t f(u) dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right] = 0$.

3. (i) $Z_t^a = \exp \left(aM_t^f - \frac{a^2}{2} \int_0^t |f(s)|^2 ds \right)$ est $\mathcal{F}_t$ -adapté (car image par une application continue d'un processus $\mathcal{F}_t$ -adapté).
- (ii) $\mathbb{E} \left[\exp \left(aM_t^f - \frac{a^2}{2} \int_0^t |f(s)|^2 ds \right) \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left(aM_t^f - \frac{a^2}{2} \int_0^t |f(s)|^2 ds \right) \right] = 1$, car $M_t^f \sim \mathcal{N}(0, \|f\|_2^2)$ et $\mathbb{E}[e^{aM_t^f}] = e^{\frac{a^2}{2} \|f\|_2^2}$.
- (iii) On a

$$\begin{aligned} Z_t^a - Z_s^a &= \exp \left(aM_t^f - \frac{a^2}{2} \int_0^t |f(s)|^2 ds \right) - \exp \left(aM_s^f - \frac{a^2}{2} \int_0^s |f(u)|^2 du \right) \\ &= Z_s^a \left[\exp \left(\underbrace{a(M_t^f - M_s^f)}_{= \int_s^t f(u) dB_u} - \frac{a^2}{2} \int_s^t |f(u)|^2 du \right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\mathbb{E}[Z_t^a - Z_s^a | \mathcal{F}_s] = Z_s^a \left(\underbrace{\mathbb{E} \left[\exp \left(a \int_s^t f(u) dB_u - \frac{a^2}{2} \int_s^t |f(u)|^2 du \right) \right]}_{\Pi \mathcal{F}_s} - 1 \right) | \mathcal{F}_s$$

et finalement,

$$\mathbb{E}[Z_t^a - Z_s^a | \mathcal{F}_s] = Z_s^a \left(\underbrace{\mathbb{E} \left[\exp \left(a \int_s^t f(u) dB_u - \frac{a^2}{2} \int_s^t |f(u)|^2 du \right) \right]}_{\Pi \mathcal{F}_s} - 1 \right) = Z_s^a (1 - 1) = 0.$$

car $\int_s^t f(u) dB_u \sim \mathcal{N} \left(0, \int_s^t |f(u)|^2 du \right)$.

□

4.7 Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Problématique : Existe-t-il un processus réel aléatoire $(X_t)_{t \geq 0}$ à trajectoires continues tel que :

$$X_t = X_0 + \theta \int_0^t X_s ds + \sigma B_t, \quad (4.1)$$

où $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est le mouvement brownien standard, X_0 une variable aléatoire, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$?

- Si $\sigma = 0$, $\frac{dX_t}{dt} = \theta X_t$, qui a pour solution $X_t = X_0 e^{\theta t}$.

- S'il y a du "bruit", $\frac{dX_t}{dt} = \theta X_t + \sigma \frac{dB_t}{dt}$.

Comment donner un sens à (4.1)?

Supposons que $\theta \neq 0$ (sinon $X_t = X_0 + \sigma B_t$). On cherche $X = (X_t)_{t \geq 0}$ tel que

$$X_t - \theta \int_0^t X_s ds = X_0 + \sigma B_t.$$

On multiplie de part et d'autre par $e^{-\theta t}$:

$$\begin{aligned} e^{-\theta t} \left[X_t - \theta \int_0^t X_s ds \right] &= e^{-\theta t} (X_0 + \sigma B_t) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left[e^{-\theta t} \int_0^t X_s ds \right] &= e^{-\theta t} (X_0 + \sigma B_t) \\ \Leftrightarrow e^{-\theta t} \int_0^t X_s ds &= \int_0^t e^{-\theta s} (X_0 + \sigma B_s) ds \\ \Leftrightarrow e^{-\theta t} \int_0^t X_s ds &= X_0 \left[\frac{e^{-\theta s}}{-\theta} \right]_0^t + \sigma \int_0^t e^{-\theta s} B_s ds \\ \Leftrightarrow e^{-\theta t} \int_0^t X_s ds &= \frac{X_0}{\theta} (1 - e^{-\theta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\theta s} B_s ds \\ \Leftrightarrow \int_0^t X_s ds &= \frac{X_0}{\theta} (e^{\theta t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\theta(t-s)} B_s ds \end{aligned}$$

On dérive la dernière égalité pour obtenir :

$$X_t = X_0 e^{\theta t} + \sigma \theta \int_0^t e^{\theta(t-s)} B_s ds + \sigma B_t.$$

La formule d'intégration par parties pour l'intégrale de Wiener donne :

$$\int_0^t e^{-\theta s} dB_s = e^{-\theta t} B_t + \int_0^t \theta e^{-\theta s} B_s ds.$$

En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 e^{\theta t} + \sigma e^{\theta t} \left[\int_0^t e^{-\theta s} dB_s - e^{-\theta t} B_t \right] + \sigma B_t \\ \Leftrightarrow X_t &= X_0 e^{\theta t} + \sigma \int_0^t e^{\theta(t-s)} dB_s. \end{aligned} \tag{4.2}$$

X_t est un processus à trajectoires continues vérifiant (4.1).

Théorème 4.21. L'équation $X_t = X_0 + \theta \int_0^t X_s ds + \sigma B_t$ admet pour unique solution $X_t = X_0 e^{\theta t} + \sigma \int_0^t e^{\theta(t-s)} dB_s$, où $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien à trajectoires continues de moyenne si $X_0 \equiv x_0$ (variable déterministe) $\mu(t) = \mathbb{E}[X_t] = x_0 e^{\theta t}$ et de variance $\frac{\sigma^2}{2\theta} (e^{2\theta t} - 1)$. X est appelé processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Preuve : Si X^1 et X^2 sont deux solutions de l'équation (4.1), alors $Z = X^1 - X^2$ vérifie l'EDO

$$Z_t = \theta \int_0^t Z_s ds,$$

dont l'unique solution est zéro (cette équation s'écrit $Z'(t) = \theta Z(t)$, $Z(0) = 0$). Ainsi $X^1 \equiv X^2$ et l'équation (4.1) a bien une unique solution qui est d'après ce qui précède $X_t = X_0 e^{\theta t} + \sigma \int_0^t e^{\theta(t-s)} dB_s$.

De plus,

$X_t = \text{processus déterministe} + \underbrace{\sigma e^{\theta t} \int_0^t e^{-\theta s} dB_s}_{\text{intégrale de Wiener}}$ est un processus gaussien avec

$$\mu(t) = \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}\left[X_0 e^{\theta t} + \sigma e^{\theta t} \int_0^t e^{-\theta s} dB_s\right].$$

Supposons que $X_0 \equiv x_0$ déterministe,

$$\mu(t) = x_0 e^{\theta t} + \sigma e^{\theta t} \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\theta s} dB_s\right]}_{=0} = x_0 e^{\theta t}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t) &= \mathbb{E}[(X_t - \mu(t))^2] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sigma e^{\theta t} \int_0^t e^{-\theta s} dB_s\right)^2\right] \\ &= \sigma^2 e^{2\theta t} \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t e^{-\theta s} dB_s\right)^2\right]}_{= \int_0^t e^{-2\theta s} ds} \quad \text{par isométrie canonique de l'intégrale de Wiener} \\ &= \sigma^2 e^{2\theta t} \frac{(1 - e^{-2\theta t})}{2\theta} \\ &= \frac{\sigma^2}{2\theta} (e^{2\theta t} - 1). \end{aligned}$$

□

Exercice 4.22. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

1. Calculer $K(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$ si $X_0 \equiv x_0$.
2. Supposons que $X_0 \sim \mathcal{N}(m, \sigma_0^2)$ indépendante de $B = (B_t)_{t \geq 0}$. Calculer $\mu(t) = \mathbb{E}[X_t]$ et $K(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t)$.

Exercice 4.23 (Le processus de Vasicek).

1. Déterminer la solution $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ de l'équation

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t a(Y_s - b) ds + \sigma B_t, \quad a, b \in \mathbb{R}, \sigma > 0.$$

2. Si $X_0 \sim \mathcal{N}(m, \sigma_0^2)$ et si X_0 est indépendante de $B = (B_t)_{t \geq 0}$, calculer la fonction espérance $\mu(t) = \mathbb{E}[Y_t]$ et la fonction de covariance $\Sigma(s, t) = \text{Cov}(Y_s, Y_t)$.
3. Montrer que pour $s \leq t$, on a

$$Y_t = b + (Y_s - b)e^{a(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{a(t-u)} dB_u.$$

4. Considérons la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ définie par $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^B \vee \sigma\{Y_0\}$, où $\mathcal{F}_t^B$ est la filtration naturelle de B . Pour tout $0 \leq s \leq t$, déterminer $\mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_s]$

Chapitre 5

Intégrale stochastique d'Itô

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $B = (B_t)_{t \geq 0}$ le mouvement brownien standard. On définit $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_u, 0 \leq u \leq t\}$ la filtration naturelle de B .

On veut donner un sens à

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X_t) + g(X_t) \frac{dB_t}{dt}. \quad (5.1)$$

On écrira (5.1) :

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dB_t.$$

Cette équation n'a de sens que si on en donne un à

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dB_s.$$

5.1 Cas des processus étagés

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des processus étagés adaptés :

$$\mathcal{E} = \left\{ \Phi = (\Phi_t)_{t \geq 0} : \Phi_t = \sum_{i=0}^{n-1} U_i \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t), U_i \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_{t_i}) \text{ bornés } \forall i = 0, \dots, n-1, |U_i| \leq k \text{ et } U_i \text{ } \mathcal{F}_{t_i} \text{ - mesurables} \right\}$$

Définition 5.1. Pour tout $\Phi \in \mathcal{E}$, on pose pour $t \geq 0$,

$$\int_0^t \Phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{n-1} U_i (B_{t_{i+1} \wedge t} - B_{t_i \wedge t}) \quad \forall t \geq 0,$$

Si $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < t < t_{m+1} < \dots < t_n$,

$$\int_0^t \Phi_s dB_s = \sum_{i=0}^{m-1} U_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + U_m (B_t - B_{t_m}).$$

Théorème 5.2. Soit $\Phi \in \mathcal{E}$, $M = (M_t)_{t \geq 0}$ tel que

$$M_t = \int_0^t \Phi_s dB_s.$$

1. M est une $\mathcal{F}_t$ -martingale d'espérance nulle :

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \Phi_s dB_s \right) = 0 \quad \forall t \geq 0,$$

2. $M_t^2 - \int_0^t \Phi_s^2 ds$ est une $\mathcal{F}_t$ -martingale et en particulier

$$\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t \Phi_s dB_s\right)^2\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t |\Phi_s|^2 ds\right) \quad t \geq 0.$$

Preuve :

1. Montrons que M est une $\mathcal{F}_t$ -martingale d'espérance nulle.

(i) M est $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adapté $\Leftrightarrow \forall t \geq 0, M_t$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

(ii) $\forall t \geq 0, M_t$ est intégrable :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|M_t|] &= \mathbb{E}\left[\left|\sum_{i=0}^{m-1} U_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + U_m(B_t - B_{t_m})\right|\right] \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E}\left[\underbrace{|U_i|}_{\in \mathcal{B}(\mathcal{F}_{t_i})} \underbrace{|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|}_{\mathbb{I} \mathcal{F}_{t_i}}\right] + \mathbb{E}\left[\underbrace{|U_m|}_{\in \mathcal{B}(\mathcal{F}_{t_m})} \underbrace{|B_t - B_{t_m}|}_{\mathbb{I} \mathcal{F}_{t_m}}\right] \\ &\stackrel{|U_i| \leq k \forall i}{\leq} k \sum_{i=0}^{m-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}(t_{i+1} - t_i)} + k \sqrt{\frac{2}{\pi}(t - t_m)} \end{aligned}$$

(iii) Soit $0 \leq s \leq t < +\infty$ tels que $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_i \leq s \leq t_{i+1} \leq \dots \leq t_j \leq t \leq t_{j+1} \leq \dots \leq t_n$. Montrons que $\mathbb{E}[(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s] = 0$. On a

$$\begin{aligned} M_t &= \int_0^t \Phi_u dB_u = \sum_{k=0}^{j-1} U_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) + U_j(B_t - B_{t_j}) \\ M_s &= \int_0^s \Phi_u dB_u = \sum_{l=0}^{i-1} U_l(B_{t_{l+1}} - B_{t_l}) + U_i(B_s - B_{t_i}), \end{aligned}$$

on en déduit que

$$M_t - M_s = \sum_{k=i+1}^{j-1} U_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) + U_j(B_t - B_{t_j}) + U_i(B_{t_{i+1}} - B_s).$$

En passant à l'espérance conditionnelle, on obtient

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=i+1}^{j-1} U_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})|\mathcal{F}_s\right] + \mathbb{E}[U_j(B_t - B_{t_j})|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[U_i(B_{t_{i+1}} - B_s)|\mathcal{F}_s].$$

Concernant le premier terme, on a pour $k \in \{i+1, \dots, j-1\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[U_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}]|\mathcal{F}_s] \quad (\text{emboîtement des tribus}) \\ &= \mathbb{E}[U_k \mathbb{E}[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}|\mathcal{F}_{t_k}]|\mathcal{F}_s] \quad \text{car } U_k \text{ est } \mathcal{F}_{t_k}\text{-mesurable et } \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_{t_k} \\ &= \mathbb{E}[U_k \mathbb{E}[B_{t_{k+1}} - B_{t_k}]]|\mathcal{F}_s = 0 \quad \text{car } B_{t_{k+1}} - B_{t_k} \mathbb{I} \mathcal{F}_{t_k}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_j(B_t - B_{t_j})|\mathcal{F}_s] &= 0 \quad \text{conditionner par rapport à } \mathcal{F}_{t_j} \\ \mathbb{E}[U_i(B_{t_{i+1}} - B_s)|\mathcal{F}_s] &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit donc que $\mathbb{E}[(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s] = 0$ et donc $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$ -martingale et $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0) = 0$.

2. Montrons que $M_t^2 - \int_0^t \Phi_s^2 ds$ est une $\mathcal{F}_t$ -martingale. Soit $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_i \leq s \leq t_{i+1} \leq \dots \leq t_j \leq t \leq t_{j+1} \leq \dots \leq t_n$. On peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[M_t^2 - 2M_t M_s + M_s^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[M_t^2 | \mathcal{F}_s] - 2M_s \underbrace{\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]}_{=M_s} + M_s^2 \\ &= \mathbb{E}[M_t^2 | \mathcal{F}_s] - M_s^2 \\ &= \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s]. \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=i+1}^{j-1} U_k(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) + U_j(B_t - B_{t_j}) + U_i(B_{t_{i+1}} - B_s)\right)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right] \end{aligned}$$

Calculons l'un des termes croisés pour $k \in \{i+1, \dots, j-1\}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_k U_j (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})(B_t - B_{t_j}) | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[U_k U_j (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})(B_t - B_{t_j}) | \mathcal{F}_{t_j}] | \mathcal{F}_s] \\ &= \underbrace{\mathbb{E}[U_k U_j (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) | \mathcal{F}_{t_j}]}_{\substack{\mathcal{F}_{t_j}\text{-mesurable} \\ t_k < t_j \Rightarrow \mathcal{F}_{t_k} \subset \mathcal{F}_{t_j}}} \underbrace{\mathbb{E}[(B_t - B_{t_j}) | \mathcal{F}_{t_j}]}_{=0} | \mathcal{F}_s = 0, \end{aligned}$$

il en est de même pour tous les termes croisés.

Calculons les termes carrés :

$$\mathbb{E}[(M_t^2 - M_s^2) | \mathcal{F}_s] = \sum_{k=i+1}^{j-1} \mathbb{E}[U_k^2 (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[U_j^2 (B_t - B_{t_j})^2 | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[U_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_s)^2 | \mathcal{F}_s],$$

en conditionnant la première espérance par $\mathcal{F}_{t_k}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U_k^2 (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[U_k^2 (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 | \mathcal{F}_{t_k}] | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[U_k^2 \mathbb{E}[(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 | \mathcal{F}_{t_k}] | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[U_k^2 (t_{k+1} - t_k) | \mathcal{F}_s], \end{aligned}$$

de la même manière, on conditionne le deuxième terme par $\mathcal{F}_{t_j}$ et le troisième terme par $\mathcal{F}_{t_i}$. On obtient

alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(M_t^2 - M_s^2) | \mathcal{F}_s] &= \sum_{k=i+1}^{j-1} \mathbb{E}[U_k^2 | \mathcal{F}_s](t_{k+1} - t_k) + \mathbb{E}[U_j^2 | \mathcal{F}_s](t - t_j) + \mathbb{E}[U_i^2 | \mathcal{F}_s](t_{i+1} - s) \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=i+1}^{j-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} U_k^2 du + \int_{t_j}^t U_j^2 du + \int_s^{t_{i+1}} U_i^2 du\right) | \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=i+1}^{j-1} \int_s^t U_k^2 \mathbb{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(u) du + \int_s^t U_j^2 \mathbb{1}_{]t_j, t]}(u) du + \int_s^t U_i^2 \mathbb{1}_{]s, t_{i+1}]}(u) du\right) | \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{k=i}^j \int_s^t U_k^2 \mathbb{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(u) du | \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t \sum_{k=0}^{n-1} U_k^2 \mathbb{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(u) du | \mathcal{F}_s\right] \quad \text{car } t_i \leq s \leq t_j \leq t \\
&= \mathbb{E}\left[\int_s^t \Phi_u^2 du | \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \Phi_u^2 du - \int_0^s \Phi_u^2 du\right) | \mathcal{F}_s\right].
\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 - \int_0^t \Phi_u^2 du | \mathcal{F}_s\right] = M_s^2 - \int_0^s \Phi_u^2 du$$

et $M_t^2 - \int_0^t \Phi_u^2 du$ est donc bien une $\mathcal{F}_t$ -martingale d'espérance nulle, et on a

$$\mathbb{E}\left[M_t^2 - \int_0^t \Phi_u^2 du\right] = \mathbb{E}\left[M_0^2 - \int_0^0 \Phi_u^2 du\right] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \Phi_u dB_u\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \Phi_u^2 du\right].$$

□

Remarque 5.3. 1. On peut définir l'intégrale stochastique de Φ jusqu'à l'infini :

$$\begin{aligned}
\left(\Phi \in \mathcal{E}, \|\cdot\| = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^{+\infty} \Phi_u^2 du\right)^{1/2}\right]\right) &\rightarrow \mathbb{L}^2(\Omega) \\
\Phi &\mapsto I(\Phi) = \int_0^{+\infty} \Phi_u dB_u.
\end{aligned}$$

2. On a $\sup_t \mathbb{E}(M_t^2) < +\infty$ car

$$\mathbb{E}(M_t^2) \leq \mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \Phi_u^2 du\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(U_i^2)(t_{i+1} - t_i) < +\infty.$$

La "bonne" notion de mesurabilité pour les processus dont on définira l'intégrale stochastique sont les processus "progressifs".

Définition 5.4. Un processus $\Phi = (\Phi_t)_{t \geq 0}$ réel est dit "progressif" (ou progressivement mesurable) si $\forall T > 0$

$$\begin{aligned}
([0, T] \times \Omega, \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{F}_T) &\rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\
(t, \omega) &\mapsto \Phi_t(\omega)
\end{aligned}$$

est mesurable (par rapport au couple (t, ω)).

En particulier, les processus continus à gauche et les processus continus à droite sont progressifs. Et si $\Phi \in \mathcal{E}$, alors Φ est progressif.

Définition 5.5. Soit

$$\Lambda^2 = \left\{ \Psi = (\Psi_t)_{t \geq 0} \text{ processus réel, progressif tel que } \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} |\Psi_s|^2 ds \right] < +\infty \right\}.$$

Proposition 5.6. $\mathcal{E}$ est dense dans Λ^2 .

Preuve : Λ^2 est un espace de Hilbert, pour montrer que $\mathcal{E}$ est dense dans Λ^2 , il suffit de montrer que si $K \in \Lambda^2$ est orthogonal à $\mathcal{E}$, alors $K = 0$. Supposons donc que $K \in \Lambda^2$ soit orthogonal à $\mathcal{E}$. Soient $0 \leq s < t$ et F une variable aléatoire $\mathcal{F}_s$ -mesurable bornée. Avec $H = F \mathbb{1}_{]s,t]} \in \mathcal{E}$, on a

$$\mathbb{E} \left[F \int_s^t K_u du \right] = \langle H, K \rangle_{\Lambda^2} = 0. \quad (5.2)$$

En posant

$$X_t = \int_0^t K_u du, \quad t \geq 0,$$

(5.2) se réécrit : $\mathbb{E}[F(X_t - X_s)] = 0$ pour tout $s < t$ et toute variable $\mathcal{F}_s$ -mesurable F bornée, i.e. $X = (X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale et $X_t \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ pour tout $t \geq 0$. De plus, X est à variation finie. On peut donc appliquer le résultat suivant : si M est une martingale continue à variation finie, alors pour tout $t \geq 0$, $M_t = M_0$ p.s. (ce résultat est montré en TD). On obtient donc

$$\int_0^t K_u du = 0, \quad \forall t \geq 0 \text{ p.s.}$$

Comme $0 = \int_0^t K_u du = \int_{\mathbb{R}} K_u \mathbb{1}_{[0,t]}(u) du$ pour tout $t \geq 0$, on en déduit que $K = 0$ dans Λ^2 . $\square$

Λ^2 est un espace de Hilbert pour $\|\Phi\| = \sqrt{\mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} |\Phi_s|^2 ds \right]}$ et $\overline{\mathcal{E}}^{\|\cdot\|} = \Lambda^2$, où $\overline{\mathcal{E}}$ est la fermeture de $\mathcal{E}$.

Théorème 5.7 (Théorème-définition). Pour tout $\Psi \in \Lambda^2$, il existe une unique variable aléatoire de $\mathbb{L}^2$ notée $\int_0^{+\infty} \Psi_s dB_s$, appelée "intégrale stochastique de Ψ par rapport à B " telle que

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \Psi_s dB_s \right] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{+\infty} \Psi_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} \Psi_s^2 ds \right].$$

Preuve : Soit $\Psi \in \Lambda^2$, il existe une suite $\Psi^n \in \mathcal{E}$ telle que $\Psi^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\Lambda^2} \Psi$, i.e.

$$\mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} (\Psi_s^n - \Psi_s)^2 ds \right] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

La suite $(\Psi^n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy (car convergente) :

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} (\Psi_s^n - \Psi_s^m)^2 ds \right] = 0$$

Or par isométrie, on a

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\int_0^{+\infty} (\Psi_s^n - \Psi_s^m)^2 ds \right] = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{+\infty} (\Psi_s^n - \Psi_s^m) dB_s \right)^2 \right] = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} \|I(\Psi^n) - I(\Psi^m)\|_{\mathbb{L}^2}^2 = 0,$$

où

$$I(\Psi^n) = \int_0^{+\infty} \Psi_s^n dB_s \quad \text{et} \quad I(\Psi^m) = \int_0^{+\infty} \Psi_s^m dB_s.$$

Donc la suite $I(\Psi^n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{L}^2$ qui est un espace de Hilbert, donc $I(\Psi^n)$ admet une limite :

$$I(\Psi^n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{L}^2} I(\Psi) = \int_0^{+\infty} \Psi_s dB_s.$$

On vient de montrer l'existence d'une limite à $I(\Psi^n)$, montrons maintenant l'unicité.

Soit donc une deuxième suite $g^n \in \mathcal{E}$ telle que $g^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\Lambda^2} \Psi$ et $\Psi^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\Lambda^2} \Psi$. Alors

$$\|g^n - \Psi^n\|_{\Lambda^2} \leq \|g^n - \Psi\|_{\Lambda^2} + \|\Psi - \Psi^n\|_{\Lambda^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Or $\|g^n - \Psi^n\|_{\Lambda^2} = \mathbb{E} \left[\left(\int_0^{+\infty} (g_s^n - \Psi_s^n) dB_s \right)^2 \right] = \|I(g^n) - I(\Psi^n)\|_{\mathbb{L}^2}$. Donc $I(g^n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{L}^2} I(\Psi)$. $\square$

$\triangle$ On n'écrit pas $\int_0^{+\infty} \Psi_s(\omega) dB_s(\omega)$ mais $\left(\int_0^{+\infty} \Psi_s dB_s \right)(\omega)$.

Remarque 5.8. Si Ψ est un processus étagé, l'intégrale est une intégrale de Wiener et on a donc

$$\int_0^{+\infty} \Psi_s dB_s = \sum_i U_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Localisation : Soit $T > 0$, $\Lambda^2[0, T] = \{\Psi = (\Psi_t)_{t \in [0, T]}$ progressif tel que $\mathbb{E}[\int_0^T \Psi_s^2 ds] < +\infty\}$ et soit $\Phi \in \Lambda^2[0, T]$, $\Phi_t \mathbb{1}_{[0, T]}(t) \in \Lambda^2$, on pose

$$\int_0^T \Phi_s dB_s = \int_0^{+\infty} \Phi_s \mathbb{1}_{[0, T]}(s) dB_s.$$

On a donc

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T \Phi_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left(\int_0^T \Phi_s^2 ds \right) \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left(\int_0^T \Phi_s dB_s \right) = 0.$$

Si $\Phi \in \Lambda_{loc}^2 = \{\Phi = (\Phi_t)_{t \geq 0}$ progressif tel que $\mathbb{E}[\int_0^t \Phi_s^2 ds] < +\infty, \forall t \geq 0\}$, alors

1. $M = (M_t)_{t \geq 0}$, avec $M_t = \int_0^t \Phi_s dB_s$ est un processus,
2. M est une $\mathcal{F}_t$ -martingale dans Λ^2 ,
3. $M_t^2 - \int_0^t \Phi_s^2 ds$ est une $\mathcal{F}_t$ -martingale dans Λ^2 ,
4. on note $\langle M \rangle_t$ le processus croissant associé à M : $\langle M \rangle_t = \int_0^t \Phi_s^2 ds$.

Exemple 5.9. L'intégrale $\int_0^t B_s dB_s$ a bien un sens car

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t B_s^2 ds \right) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^t \mathbb{E}(B_s^2) ds = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2} < +\infty,$$

et on a donc $B \in \Lambda_{loc}^2$. Le processus $\int_0^t B_s dB_s$ est une $\mathcal{F}_t$ -martingale et

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} (B_t^2 - t).$$

$\triangle$ $\int_0^{+\infty} B_s dB_s$ n'a pas de sens puisque $\mathbb{E}[\int_0^{+\infty} B_s^2 ds] = +\infty$.

5.2 Temps d'arrêt. Martingales locales

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration.

5.2.1 Temps d'arrêt

Définition 5.10. Une variable aléatoire réelle $T : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est un $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt si $\forall t \geq 0, \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Exemple 5.11. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus réel $\mathcal{F}_t$ -adapté à trajectoires continues. Soit B un fermé de $\mathbb{R}$, alors $T_B = \inf\{t \geq 0 : X_t \in B\}$ est un temps d'arrêt (convention $\inf \emptyset = +\infty$).

Propriété 5.12. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus $\mathcal{F}_t$ -adapté et T un $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt.

1. Si $T < +\infty$ p.s., X_T est $\mathcal{F}_T$ -mesurable où

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : \forall t \geq 0 A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

2. Si T et S sont deux temps d'arrêt, alors $T + S$ et $T \wedge S$ sont des temps d'arrêt.

Exemple 5.13 (Exemple fondamental). Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus continu adapté partant de 0. Pour tout $n \geq 1$, on définit

$$R_n = \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq n\} \quad (\text{avec } \inf \emptyset = +\infty).$$

C'est un temps d'arrêt. C'est le temps d'entrée dans le fermé $]-\infty, -n] \cup [n, +\infty[$ par X , processus continu et adapté.

- a) $R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ p.s.

En effet, $|X_t| \geq n+1 \Rightarrow |X_t| \geq n \Rightarrow R_n \leq R_{n+1}$ et $\{R_n \leq a\} = \left\{ \sup_{t \in [0, a]} |X_t| \geq n \right\}$. Par continuité des trajectoires donc uniforme continuité sur les compacts, on a $Z_a = \sup_{t \in [0, a]} |X_t| < +\infty$ p.s. Donc

$$\mathbb{P}(R_n \leq a) = \mathbb{P}(Z_a \geq n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On en déduit que $R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} +\infty$ ce qui entraîne $R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ p.s.

(il existe une $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une suite croissante telle que $R_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} +\infty$ (i.e. il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mathbb{P}(A) = 1$ et pour tout $\omega \in A$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{\varphi(n)}(\omega) = +\infty$), comme la suite $(R_n)_n$ est croissante, pour tout $m \geq \varphi(n)$ et $\omega \in A$, $R_m(\omega) \geq R_{\varphi(n)}(\omega)$. Soit $K > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\omega \in A$, $R_{\varphi(n_0)}(\omega) > K$ et donc pour tout $n > \varphi(n_0)$ et $\omega \in A$, $R_n(\omega) > R_{\varphi(n_0)}(\omega) > K$, on en déduit que $R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} +\infty$.)

- b) Pour tout $t \geq 0$, $|X_{t \wedge R_n}| \leq n$ et $|X_{R_n}| = n$ (ce serait faux pour un processus non continu).

Proposition 5.14. Soit T un temps d'arrêt et S une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ -mesurable telle que $S \geq T$. Alors S est aussi un temps d'arrêt. En particulier, si T est un temps d'arrêt

$$T_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{2^n} \mathbb{1}_{\{k2^{-n} < T \leq (k+1)2^{-n}\}} + (+\infty) \mathbb{1}_{\{T=+\infty\}},$$

est une suite de temps d'arrêt qui décroît vers T .

Preuve : On peut écrire $\{S \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ car $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_T$ (S est $\mathcal{F}_T$ -mesurable).

La deuxième partie en découle facilement puisque $T_n \geq T$ et on peut montrer que T_n est $\mathcal{F}_T$ -mesurable. En effet, T_n est $\mathcal{F}_T$ -mesurable si pour tout $u \geq 0$, $\{T_n \leq u\} \in \mathcal{F}_T$. Pour cela, il faut voir que pour tout $t \geq 0$, on a $\{T_n \leq u\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Or on peut écrire

$$\{T_n \leq u\} = \left\{ T_n \leq \frac{[2^n u]}{2^n} \right\} = \bigcup_{k=0}^{[2^n u]-1} \left\{ T_n = \frac{k+1}{2^n} \right\} = \bigcup_{k=0}^{[2^n u]-1} \left\{ T \in \left] \frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \right\} = \left\{ T \leq \frac{[2^n u]}{2^n} \right\}.$$

On a donc $\{T_n \leq u\} \cap \{T \leq t\} = \left\{ T \leq t \wedge \frac{[2^n u]}{2^n} \right\} \in \mathcal{F}_{t \wedge \frac{[2^n u]}{2^n}} \subset \mathcal{F}_t$. □

Proposition 5.15. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus progressif et T un temps d'arrêt. Alors $X_T \mathbb{1}_{\{T < +\infty\}}$ est $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

Preuve : On commence par montrer que $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{F}_T$ -mesurable si et seulement si pour tout $t \geq 0$, $Y \mathbb{1}_{T \leq t}$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable. En effet, si $Y \mathbb{1}_{T \leq t}$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable, alors $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\{Y \in A\} \cap \{T \leq t\} = \{Y \mathbb{1}_{\{T \leq t\}} \in A\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

donc $\{Y \in A\} \in \mathcal{F}_T$. Inversement, si Y est $\mathcal{F}_T$ -mesurable, alors $\{Y \mathbb{1}_{\{T \leq t\}} \in A\} = (\{Y \in A\} \cap \{T \leq t\}) \cup (\{0 \in A\} \cap \{T > t\}) \in \mathcal{F}_t$.

On vérifie la $\mathcal{F}_T$ -mesurabilité de $Y = X_T \mathbb{1}_{\{T < +\infty\}}$ en montrant que pour tout $t \geq 0$,

$$Y \mathbb{1}_{\{T \leq t\}} = X_T \mathbb{1}_{\{T \leq t\}} = X_{T \wedge t} \mathbb{1}_{\{T \leq t\}}$$

est $\mathcal{F}_t$ -mesurable. En effet, $X_{T \wedge t}$ est la composition de deux applications mesurables :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\Omega, \mathcal{F}_t) & \rightarrow ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \\ \omega & \mapsto (T(\omega) \wedge t, \omega) \end{array} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) & \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ (s, \omega) & \mapsto X_s(\omega) \end{array} \right\}$$

car T est un temps d'arrêt et X est progressif. On conclut que $X_{T \wedge t}$ donc aussi $X_{T \wedge t} \mathbb{1}_{\{T \leq t\}}$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable. $\square$

Remarque 5.16. Il est nécessaire de considérer $X_T \mathbb{1}_{\{T < +\infty\}}$ plutôt que X_T tant que X_∞ n'est pas défini. Par contre, si X_∞ est défini et est $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable alors X_T est $\mathcal{F}_T$ -mesurable. En effet, comme $X_T = X_T \mathbb{1}_{\{T = +\infty\}} + X_T \mathbb{1}_{\{T < +\infty\}}$ avec $X_T \mathbb{1}_{\{T < +\infty\}}$ $\mathcal{F}_T$ -mesurable d'après la proposition précédente, il reste à voir que $X_T \mathbb{1}_{\{T = +\infty\}}$ est aussi $\mathcal{F}_T$ -mesurable, i.e. pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\{X_T \mathbb{1}_{\{T = +\infty\}} \in A\} = (\{X_\infty \in A\} \cap \{T = +\infty\}) \cup (\{0 \in A\} \cap \{T < +\infty\}) \in \mathcal{F}_T.$$

Pour cela, on a $\{X_T \mathbb{1}_{\{T = +\infty\}} \in A\} \cap \{T \leq t\} = \{0 \in A\} \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ quand $t < +\infty$, tandis que pour $t = +\infty$, $\{X_T \mathbb{1}_{\{T = +\infty\}} \in A\} \cap \{T \leq +\infty\} = (\{X_\infty \in A\} \cap \{T = +\infty\}) \cup (\{0 \in A\} \cap \{T < +\infty\}) \in \mathcal{F}_\infty$.

5.2.2 Théorème d'arrêt

Définition 5.17. Une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \geq 0}$ dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dite uniformément intégrable si

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|X_t| \mathbb{1}_{\{|X_t| > a\}}] \right) = 0.$$

La propriété d'uniforme intégrabilité implique d'être borné dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La réciproque est fausse.

Proposition 5.18. Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une famille de variables aléatoires dans $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est bornée dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour un certain $p > 1$, alors elle est uniformément intégrable.
2. S'il existe une variable aléatoire positive Z telle que $|X_t| \leq Z$ p.s. pour tout $t \geq 0$ et $\mathbb{E}[Z] < +\infty$, alors le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est uniformément intégrable.

Preuve :

1. Pour tout $a \geq 1$, on a

$$\forall x > a, \quad x \leq x^p,$$

et on pose $\varphi(a) = \sup_{x > a} \left(\frac{x}{x^p} \right)$. On a $\lim_{a \rightarrow +\infty} \varphi(a) = 0$. On en déduit pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[|X_t| \mathbb{1}_{\{|X_t| > a\}}] \leq \varphi(a) \mathbb{E}[|X_t|^p \mathbb{1}_{\{|X_t| > a\}}] \leq \varphi(a) \mathbb{E}[|X_t|^p].$$

Comme $(X_t)_{t \geq 0}$ est bornée dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ par $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|X_t|^p]$, l'inégalité

$$\mathbb{E}[|X_t| \mathbb{1}_{\{|X_t| > a\}}] \leq \varphi(a) \sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|X_t|^p],$$

permet de conclure que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est uniformément intégrable.

2. Pour tout $t \geq 0$, comme $|X_t| \leq Z$ p.s., on a

$$\mathbb{E}[|X_t| \mathbb{1}_{\{|X_t| > a\}}] \leq \mathbb{E}[Z \mathbb{1}_{\{Z > a\}}].$$

Le théorème de convergence dominée permet alors de conclure que le processus $(X_t)_{t \geq 0}$ est uniformément intégrable.

Quelques rappels sur les processus discrets

Théorème 5.19 (Théorème d'arrêt de Doob). Soit $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale (surmartingale respectivement) par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Si S et T sont deux temps d'arrêt bornés à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ tels que $S \leq T$ p.s., alors

$$\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] = X_S \quad \text{p.s.}$$

($\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] \leq X_S$ p.s. respectivement).

Preuve : admis

Théorème 5.20. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la famille $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable,
- (ii) X_n converge p.s. et dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ vers une variable aléatoire X_∞ ,
- (iii) la martingale $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est fermée.

Lorsque l'une de ces assertions est vérifiée, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_n]$ p.s.

Retour aux processus continus

Définition 5.21 (Martingale fermée). Une surmartingale $(X_t)_{t \geq 0}$ est dite fermée par une variable aléatoire $X_\infty \in L^1$ si pour tout $t \geq 0$, on a $X_t \geq \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_t]$ p.s..

Une martingale $(X_t)_{t \geq 0}$ est dite fermée (comme martingale) par une variable aléatoire $X_\infty \in L^1$ si pour tout $t \geq 0$, on a $X_t = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_t]$ p.s..

Remarque 5.22. Une martingale peut être fermée en tant que surmartingale mais pas en tant que martingale : considérer par exemple une martingale positive (non nulle), elle est fermée par 0 en tant que surmartingale ($X_t \geq \mathbb{E}[0 | \mathcal{F}_t]$), pourtant elle n'est pas nulle.

Proposition 5.23. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ une martingale continue à droite. Alors, il y a équivalence entre les assertions suivantes :

- 1. X est fermée (par X_∞);
- 2. la famille $(X_t)_{t \geq 0}$ est uniformément intégrable;

Preuve : admis

Théorème 5.24 (Théorème d'arrêt de Doob). Soit X une martingale continue à droite fermée par X_∞ , variable aléatoire $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable. Alors, si S et T sont deux temps d'arrêt avec $S \leq T$, on a

$$X_S = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] \quad \text{p.s.,}$$

avec la convention $X_T = X_\infty$ sur $\{T = +\infty\}$. En particulier, $X_S = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_S]$ p.s..

Preuve : Soit $\mathbb{T}$ l'ensemble de tous les temps d'arrêt qui prennent leurs valeurs dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

- On commence par montrer que pour tout $\tau \in \mathbb{T}$, $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$. Supposons que τ soit à valeurs dans $\{0 = t_1 < \dots < t_d\}$, alors on peut écrire

$$\begin{aligned}
 X_\tau &= \sum_{1 \leq i \leq d} \mathbb{1}_{\{\tau = t_i\}} X_{t_i} \\
 &= \sum_{1 \leq i < d} (\mathbb{1}_{\{\tau \geq t_i\}} - \mathbb{1}_{\{\tau \geq t_{i+1}\}}) X_{t_i} + \mathbb{1}_{\{\tau \geq t_d\}} X_{t_d} \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq d} \mathbb{1}_{\{\tau \geq t_i\}} X_{t_i} - \sum_{1 < i \leq d} \mathbb{1}_{\{\tau \geq t_i\}} X_{t_{i-1}} \\
 &= X_0 + \sum_{1 < i \leq d} \mathbb{1}_{\{\tau \geq t_i\}} (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})
 \end{aligned}$$

Or on a $\{\tau \geq t_i\} = \{\tau \leq t_{i-1}\}^c \in \mathcal{F}_{t_{i-1}}$ et X est une martingale, on obtient donc le résultat voulu :

$$\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]. \quad (5.3)$$

- (5.3) permet de montrer le résultat dans le cas particulier où S et T sont dans $\mathbb{T}$. Soit $A \in \mathcal{F}_S$. Posons $S|_A := S\mathbb{1}_A + (+\infty)\mathbb{1}_{A^c}$ et $T|_A = T\mathbb{1}_A + (+\infty)\mathbb{1}_{A^c}$. Ce sont deux temps d'arrêt : soit $s \geq 0$, $S\mathbb{1}_{S \leq s} = (S \wedge s)\mathbb{1}_{S \leq s}$ est $\mathcal{F}_s$ -mesurable comme produit de deux fonctions mesurables, car S est un temps d'arrêt. Donc d'après la preuve de la proposition 5.15, S est $\mathcal{F}_S$ -mesurable et donc $\{S|_A \leq s\} = \{S \leq s\} \cap A \in \mathcal{F}_S$. On applique 5.3 à $S|_A$ et $T|_A$:

$$\mathbb{E}[X_S \mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_{A^c}] = \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_T \mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[X_\infty \mathbb{1}_{A^c}],$$

on en déduit que $X_S = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S]$ p.s. par définition de l'espérance conditionnelle car X_S est $\mathcal{F}_S$ -mesurable.

- Le cas général repose sur la continuité à droite de X . On introduit les deux suites :

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k+1}{2^n} \mathbb{1}_{\{k2^{-n} < S \leq (k+1)2^{-n}\}} + (+\infty)\mathbb{1}_{\{S \geq n\}} \\
 T_n &= \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k+1}{2^n} \mathbb{1}_{\{k2^{-n} < T \leq (k+1)2^{-n}\}} + (+\infty)\mathbb{1}_{\{T \geq n\}}.
 \end{aligned}$$

D'après la Proposition (5.14), $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de temps d'arrêt qui décroissent vers S et T respectivement et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq T_n$. S_n et T_n appartiennent à $\mathbb{T}$, on a donc

$$X_{S_n} = \mathbb{E}[X_{T_n} | \mathcal{F}_{S_n}].$$

Soit $A \in \mathcal{F}_S$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_{S_n}$ donc $A \in \mathcal{F}_{S_n}$, on peut donc écrire d'après la définition de l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_{S_n}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_{T_n}].$$

Par continuité à droite des trajectoires, on a p.s., $X_S = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{S_n}$ et $X_T = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_{T_n}$, et ces limites ont aussi lieu dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ d'après le Théorème (5.20) pour les martingales à temps discrets. On en déduit que X_S et X_T sont dans $\mathbb{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et en passant à la limite, on obtient donc

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_S] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A X_T],$$

d'où par définition de l'espérance conditionnelle, comme X_S est $\mathcal{F}_S$ mesurable, $X_S = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S]$. □

Corollaire 5.25. Si X est une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -martingale continue à droite et si S et T sont deux temps d'arrêt tels que $S \leq T \leq K$, K étant une constante finie (S et T sont bornés), alors X_T est intégrable et $\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] = X_S$ p.s.

Étant donné un temps d'arrêt T , on définit le processus arrêté $X^T = (X_t^T)_{t \geq 0}$ par $X_t^T = X_{t \wedge T}$, c'est le processus qui vaut (X_t) tant que $t \leq T$ puis qu'on arrête à sa valeur en T , X_T , pour les dates ultérieures à T .

Corollaire 5.26. Soit X une martingale continue à droite uniformément intégrable et soit T un temps d'arrêt. Alors le processus $(X_t^T)_{t \geq 0}$ est aussi une martingale uniformément intégrable, et

$$\forall t \geq 0, \quad X_t^T = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_t] \text{ p.s.} \quad (5.4)$$

avec la convention $X_T = X_\infty$ sur $\{T = +\infty\}$.

Preuve : Il suffit d'établir (5.4) : on aura alors une martingale fermée donc uniformément intégrable. Rappelons que $X_T \in L^1$ d'après le théorème d'arrêt. D'après ce théorème avec $S = t \wedge T \leq T$, on a aussi

$$X_t^T = X_S = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_{t \wedge T}] \text{ p.s.}$$

Il reste à voir que $\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_{t \wedge T}] = \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_t]$ p.s. Puisque $X_T \mathbb{1}_{T < +\infty}$ est $\mathcal{F}_T$ -mesurable (cf. Proposition 5.15), on sait que $X_T \mathbb{1}_{T \leq t}$ est $\mathcal{F}_t$ -mesurable et aussi $\mathcal{F}_T$ -mesurable, donc $\mathcal{F}_{t \wedge T}$ -mesurable. Il en découle que

$$\mathbb{E}[X_T \mathbb{1}_{\{T \leq t\}} | \mathcal{F}_{t \wedge T}] = X_T \mathbb{1}_{\{T \leq t\}} = \mathbb{E}[X_T \mathbb{1}_{\{T \leq t\}} | \mathcal{F}_t] \text{ p.s..}$$

Pour compléter la preuve, il reste à voir que

$$\mathbb{E}[X_T \mathbb{1}_{\{T > t\}} | \mathcal{F}_{t \wedge T}] = \mathbb{E}[X_T \mathbb{1}_{\{T > t\}} | \mathcal{F}_t] \text{ p.s.}$$

Or si $A \in \mathcal{F}_t$, on a

- $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_t$ car $\{T > t\} = \{T \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t$;
- puis $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_T$ car $A \cap \{T > t\} \cap \{T \leq s\} = \emptyset \in \mathcal{F}_s$ si $s \leq t$ et $A \cap \{T > t\} \cap \{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s$ si $t \leq s$ car $\{T > t\} = \{T \leq t\}^c \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$ et $\{T \leq s\} \in \mathcal{F}_s$.

Finalement, $A \cap \{T > t\} \in \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t \wedge T}$ et donc pour tout $A \in \mathcal{F}_t$:

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{T > t\}} X_T] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{T > t\}} X_T | \mathcal{F}_{t \wedge T}]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{T > t\}} \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_{t \wedge T}]] \text{ p.s.}$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{T > t\}} X_T] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{T > t\}} X_T | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T > t\}} X_T | \mathcal{F}_t]] \text{ p.s.}$$

On a donc

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T > t\}} X_T | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{T > t\}} \mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_{t \wedge T}]] \text{ p.s.}$$

avec $\mathbb{E}[X_T \mathbb{1}_{\{T > t\}} | \mathcal{F}_t]$ qui est $\mathcal{F}_t$ -mesurable. Mais rappelons que $Y = \mathbb{E}[Z | \mathcal{G}]$ ssi Y est $\mathcal{G}$ -mesurable et $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A Z] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A Y]$ pour tout $A \in \mathcal{G}$. Finalement,

$$\mathbb{E}[X_T \mathbb{1}_{\{T > t\}} | \mathcal{F}_{t \wedge T}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T > t\}} X_T | \mathcal{F}_t] \text{ p.s.}$$

□

Proposition 5.27. Soit X un processus càd et adapté. X est une martingale si et seulement si pour tout temps d'arrêt borné T , la variable X_T est intégrable et $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$.

Preuve : • $\Rightarrow$ vient du théorème d'arrêt de Doob.

• $\Leftarrow$ Soient $0 < s < t$ et $A \in \mathcal{F}_s$. Posons $T = t \mathbb{1}_{A^c} + s \mathbb{1}_A$. C'est un temps d'arrêt borné. On a donc

$$\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_t \mathbb{1}_{A^c}] + \mathbb{E}[X_s \mathbb{1}_A].$$

De même pour tout $t \geq 0$, t est un temps d'arrêt borné. On a donc également,

$$\mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_t \mathbb{1}_A] + \mathbb{E}[X_t \mathbb{1}_{A^c}].$$

On en déduit que $\mathbb{E}[X_t \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[X_s \mathbb{1}_A]$, autrement dit $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$.

□

Proposition 5.28. Soient X une martingale càd et T un temps d'arrêt, alors le processus arrêté $X^T = (X_t^T)_{t \geq 0}$ est une martingale. Si de plus X est uniformément intégrable, alors X^T l'est aussi.

Preuve : Le processus arrêté X^T est nécessairement continu à droite. D'après la proposition précédente, il suffit de vérifier que $\mathbb{E}[X_S^T] = \mathbb{E}[X_0^T]$ pour tout temps d'arrêt borné S . Or $X_S^T = X_{T \wedge S}$, où $T \wedge S$ est un temps d'arrêt borné. Encore d'après la proposition précédente, on a $\mathbb{E}[X_S^T] = \mathbb{E}[X_{T \wedge S}] = \mathbb{E}[X_0] = \mathbb{E}[X_0^T]$. Donc d'après la proposition précédente X^T est une martingale.

Conclusion. Si X est une martingale et T un temps d'arrêt, X^T définit bien une martingale appelée martingale arrêtée. Elle est uniformément intégrable si X l'est ou si T est un temps d'arrêt borné.

5.2.3 Martingale locale

Définition 5.29. Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ un processus réel adapté à trajectoires continues. On dit que c'est une $\mathcal{F}_t$ -martingale locale (continue), s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(T_p)_{p \geq 0}$ tendant vers $+\infty$ p.s. telle que $(M_{t \wedge T_p})_{t \geq 0}$ soit une $\mathcal{F}_t$ -martingale :

1. $(M_{t \wedge T_p})_{t \geq 0}$ est $\mathcal{F}_t$ -adapté,
2. $\mathbb{E}[|M_{t \wedge T_p}|] < +\infty, \forall t \geq 0, \forall p \in \mathbb{N}$,
3. $\mathbb{E}[M_{t \wedge T_p} | \mathcal{F}_s] = M_{s \wedge T_p}, \forall 0 \leq s \leq t, \forall p \in \mathbb{N}$.

On dit que la suite $(T_p)_{p \in \mathbb{N}}$ réduit M .

⚠ On n'a pas forcément $\mathbb{E}[|M_t|] < +\infty$, les martingales locales ne sont pas forcément intégrables.

Exemple 5.30. Une martingale à trajectoires continues est une martingale locale et la suite $T_n = n$ réduit M . En effet, cela vient du corollaire 5.26 et de ses conséquences avec les temps d'arrêt $T_n = n \nearrow +\infty$, plus simplement, il est immédiat que pour $s < t$:

$$M_{s \wedge n} = \mathbb{E}[M_{t \wedge n} | \mathcal{F}_s].$$

Proposition 5.31. Si M est une martingale locale continue, pour tout temps d'arrêt T , M^T est une martingale locale.

Preuve : Si T_p réduit M , alors M^{T_p} est une martingale et $(M^T)^{T_p} = M^{T \wedge T_p} = (M^{T_p})^T$ l'est aussi d'après le corollaire 5.26.

Proposition 5.32. Si $(T_n)_{n \geq 0}$ réduit M et si $(S_n)_{n \geq 0}$ est une suite de temps d'arrêt telle que $S_n \nearrow +\infty$, alors la suite $(T_n \wedge S_n)_{n \geq 0}$ réduit aussi M .

Preuve : On a $(T_n \wedge S_n) \nearrow +\infty$ et $M^{T_n \wedge S_n} = (M^{T_n})^{S_n}$ est une martingale. Donc M est une martingale locale et $(S_n \wedge T_n)_{n \geq 0}$ réduit M .

Proposition 5.33. Soit $R_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$ avec M une martingale locale continue partant de 0. Alors $M_{t \wedge R_n}$ est une martingale uniformément bornée.

Preuve : Il existe une suite $(T_p)_{p \geq 0}$ de temps d'arrêt tendant vers $+\infty$ telle que $(M_{t \wedge T_p})_{t \geq 0}$ soit une $\mathcal{F}_t$ -martingale. D'après les résultats précédents, $M_{t \wedge T_p \wedge R_n}$ est une $\mathcal{F}_t$ -martingale uniformément bornée par n . On a donc pour tout $A \in \mathcal{F}_s, 0 \leq s \leq t, \mathbb{E}[M_{t \wedge T_p \wedge R_n} \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_{s \wedge T_p \wedge R_n} \mathbb{1}_A]$ (définition d'une martingale). Comme $T_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$,

$$M_{t \wedge T_p \wedge R_n} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M_{t \wedge R_n} \quad \text{p.s.}$$

$$M_{s \wedge T_p \wedge R_n} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M_{s \wedge R_n} \quad \text{p.s.,}$$

et $|M_{t \wedge T_p \wedge R_n}| \leq n$, on peut appliquer le théorème de convergence dominé (Lebesgue) :

$$\mathbb{E}[M_{t \wedge T_p \wedge R_n} \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_{s \wedge T_p \wedge R_n} \mathbb{1}_A] \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[M_{t \wedge R_n} \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_{s \wedge R_n} \mathbb{1}_A].$$

Donc $M_{s \wedge R_n} = \mathbb{E}[M_{t \wedge R_n} | \mathcal{F}_s]$ et $(M_{t \wedge R_n})_{t \geq 0}$ est une martingale uniformément bornée par n . $\square$

Théorème 5.34 (Crochet d'une martingale locale). *Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale continue. Il existe un processus croissant, noté $(\langle M, M \rangle_t)_{t \geq 0}$ unique tel que*

$$M_t^2 - \langle M, M \rangle_t \quad (5.5)$$

soit une martingale locale continue. De plus, pour tout $t > 0$, si $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{r_n}^n = t$ est une suite de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, on a

$$\sum_{i=1}^{r_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \langle M, M \rangle_t.$$

Le processus $\langle M, M \rangle$ est appelé la variation quadratique ou crochet de M . On le note aussi $\langle M \rangle$.

Preuve :

1. L'unicité résulte du résultat suivant :

Théorème 5.35. *Soit M une martingale locale continue issue de 0. Alors si M est un processus à variation finie, M est indistinguable de 0.*

Preuve : Supposons que M est un processus à variation finie et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t |dM_s| \geq n\}.$$

Les temps τ_n sont des temps d'arrêt (car $\int_0^t |dM_s| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_n} |M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}|$ donc le processus $\int_0^t |dM_s|$ est continu et adapté). Fixons $n \geq 1$ et posons $N = M^{\tau_n}$. Alors N est une martingale locale telle que $\int_0^{+\infty} |dN_s| \leq n$, en particulier, $|N_t| = |\int_0^{t \wedge \tau_n} dM_s| \leq \int_0^{t \wedge \tau_n} |dM_s| \leq n$. On en déduit que N est une martingale bornée. Ensuite, soit $t > 0$ et soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p = t$ une subdivision de $[0, t]$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_t^2] &= \sum_{i=1}^p \mathbb{E}[N_{t_i}^2 - N_{t_{i-1}}^2] = \sum_{i=1}^p \mathbb{E}[(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})^2] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\left(\sup_{1 \leq i \leq p} |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}|\right) \sum_{i=1}^p |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}|\right] \leq n \mathbb{E}\left[\left(\sup_{1 \leq i \leq p} |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}|\right)\right]. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité précédente à une suite $0 = t_0^k < t_1^k < \dots < t_{p_k}^k = t$ de subdivisions de $[0, t]$ de pas tendant vers 0. En utilisant la continuité des trajectoires, et le fait que N est bornée par n , on a par convergence dominée :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{E}\left[\sup_{1 \leq i \leq p_k} |N_{t_i^k} - N_{t_{i-1}^k}|\right] = 0$$

On conclut alors que $\mathbb{E}[N_t^2] = 0$ c'est-à-dire $\mathbb{E}[M_{t \wedge \tau_n}^2] = 0$. En faisant ensuite tendre n vers $+\infty$, comme $\tau_n \rightarrow +\infty$, on obtient par le lemme de Fatou :

$$\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{t \wedge \tau_n}^2\right] = \mathbb{E}\left[\liminf_{n \rightarrow +\infty} M_{t \wedge \tau_n}^2\right] \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[M_{t \wedge \tau_n}^2] = 0.$$

Finalement pour tout $t \geq 0$, $M_t = 0$ p.s. La martingale locale M admet donc 0 comme modification : $\forall t \geq 0$, $\mathbb{P}(M_t = 0) = 1$. Pour conclure comme 0 et M sont à trajectoires continues, le processus M est en fait indistinguable de 0 : $\mathbb{P}(M_t = 0, \forall t \geq 0) = 1$. $\square$

Retour à l'unicité du crochet. Si A et A' sont deux processus croissants satisfaisant la condition (5.5), le processus $A_t - A'_t = (M_t^2 - A'_t) - (M_t^2 - A_t)$ doit être à la fois une martingale locale (car différence de martingales locales) et un processus à variation finie (car différence de tels processus), ce qui exige sa nullité p.s.

2. Pour l'existence,

- (a) On considère d'abord le cas où $M_0 = 0$ et M est bornée. M est alors une vraie martingale (cf. exercice TD). On se fixe $t > 0$ et $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{r_n}^n = t$ une suite de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0. Pour chaque $n \geq 1$, on considère le processus $X^{(n)}$ défini par

$$X_s^n = \sum_{i=1}^{r_n} M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n \wedge s} - M_{t_{i-1}^n \wedge s}).$$

Lemme 5.36. *Le processus X^n est une martingale à trajectoires continues.*

Preuve : Le processus X est adapté et à trajectoires continues car la martingale M l'est, il est intégrable car M est bornée. Pour la propriété de martingale, pour $s \leq r$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_r^n | \mathcal{F}_s] &= \sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{E}[M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n \wedge r} - M_{t_{i-1}^n \wedge r}) | \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{i: t_{i-1}^n \leq r} \mathbb{E}[M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n \wedge r} - M_{t_{i-1}^n \wedge r}) | \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{i: s \leq t_{i-1}^n \leq r} \mathbb{E}[M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n \wedge r} - M_{t_{i-1}^n \wedge r}) | \mathcal{F}_s] + \sum_{i: t_{i-1}^n \leq s \leq r} \mathbb{E}[M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n \wedge r} - M_{t_{i-1}^n \wedge r}) | \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{i: s \leq t_{i-1}^n \leq r} \mathbb{E}[M_{t_{i-1}^n} \underbrace{\mathbb{E}[M_{t_i^n \wedge r} - M_{t_{i-1}^n \wedge r} | \mathcal{F}_{t_{i-1}^n}]}_{=0} | \mathcal{F}_s] + \sum_{i: t_{i-1}^n \leq s \leq r} \mathbb{E}[M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n \wedge r} - M_{t_{i-1}^n \wedge r}) | \mathcal{F}_s] \\ &= \sum_{i: t_{i-1}^n \leq s} M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n \wedge s} - M_{t_{i-1}^n \wedge s}) = X_s^n. \end{aligned}$$

$\square$

On a ensuite :

Lemme 5.37. *Les variables aléatoires X_t^n , $n \geq 1$, vérifient une propriété de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:*

Preuve : En utilisant la relation martingale pour $m \leq n$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_t^n - X_t^m)^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} M_{t_{i-1}^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n}) - \sum_{i=1}^{r_m} M_{t_{i-1}^m} (M_{t_i^m} - M_{t_{i-1}^m})\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{r_n} \sum_{t_j^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n]} (M_{t_{i-1}^n} - M_{t_{j-1}^m}) (M_{t_j^n} - M_{t_{j-1}^n})\right)^2\right] \quad (\text{partitions emboîtées}) \\ &= \sum_{i=1}^{r_n} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{t_j^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n]} (M_{t_{i-1}^n} - M_{t_{j-1}^m}) (M_{t_j^n} - M_{t_{j-1}^n})\right)^2\right] \quad (\text{relation martingale}) \\ &\quad (\text{la relation martingale annule les termes croisés du carré de la somme}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{r_n} \sum_{t_j^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n]} \mathbb{E} \left[(M_{t_{i-1}^n} - M_{t_{j-1}^m})^2 (M_{t_j^n} - M_{t_{j-1}^m})^2 \right] \quad (\text{relation martingale})$$

(la relation martingale annule à nouveau les termes croisés du carré de la somme)

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{r_n} \sum_{t_j^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n]} \mathbb{E} \left[(M_{t_{i-1}^n} - M_{t_{j-1}^m})^2 \mathbb{E}[(M_{t_j^n} - M_{t_{j-1}^m})^2 | \mathcal{F}_{t_{j-1}^m}] \right] \quad (M_{t_{i-1}^n} \text{ et } M_{t_{j-1}^m} \text{ sont } \mathcal{F}_{t_{j-1}^m} \text{-mesurables}) \\ &= \sum_{i=1}^{r_n} \sum_{t_j^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n]} \mathbb{E} \left[(M_{t_{i-1}^n} - M_{t_{j-1}^m})^2 (M_{t_j^m}^2 - M_{t_{j-1}^m}^2) \right] \quad (\text{relation martingale}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{r_n} \sum_{t_j^m \in]t_{i-1}^n, t_i^n]} \mathbb{E} \left[\sup_{i,j} \{ (M_{t_{i-1}^n} - M_{t_{j-1}^m})^2 \} (M_{t_j^m}^2 - M_{t_{j-1}^m}^2) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\sup_{i,j} \{ (M_{t_{i-1}^n} - M_{t_{j-1}^m})^2 \} \sum_{j=1}^{r_n} (M_{t_j^m}^2 - M_{t_{j-1}^m}^2) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\sup_{i,j} \{ (M_{t_{i-1}^n} - M_{t_{j-1}^m})^2 \} M_t^2 \right] \xrightarrow{n,m \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

où la dernière convergence vient par convergence dominée en utilisant que M est bornée et

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \sup_{1 \leq i \leq r_n, 1 \leq j \leq r_m} (M_{t_{i-1}^n} - M_{t_{j-1}^m}) = 0$$

par continuité des trajectoires de M . On a donc

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[(X_t^n - X_t^m)^2] = 0.$$

□

Lemme 5.38 (Inégalité de Doob). *Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale continue. Alors pour $p > 1$ et $T > 0$,*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[|M_T|^p].$$

Preuve : Admis.

Retour à la preuve du théorème.

L'inégalité de Doob donne alors avec $p = 2$ donne

$$\lim_{n,m \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} (X_s^n - X_s^m)^2 \right] = 0. \quad (5.6)$$

On peut alors extraire une sous-suite $(n_k)_{k \geq 0}$ telle que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} (X_s^{n_k} - X_s^{n_{k+1}})^2 \right]^{1/2} \leq \frac{1}{2^k}.$$

Avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a alors

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{s \leq t} |X_s^{n_k} - X_s^{n_{k+1}}| \right] \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} (X_s^{n_k} - X_s^{n_{k+1}})^2 \right]^{1/2} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty.$$

On en déduit que presque sûrement,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{s \leq t} |X_s^{n_k} - X_s^{n_{k+1}}| < +\infty.$$

Presque sûrement, la suite $(X_s^{n_k})_{s \in [0, t]}$ converge donc uniformément sur $[0, t]$ vers une limite qu'on note $(Y_s)_{s \in [0, t]}$. Sur l'ensemble négligeable où il n'y a pas la convergence, on impose $Y_s = 0$. Le processus limite $(Y_s)_{s \in [0, t]}$ a alors des trajectoires continues.

Comme d'après (5.6), $(X_s^n)_{s \in [0, t]}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2$, on a aussi convergence $X_s^n \rightarrow Y_s$ dans $\mathbb{L}^2$ quand $n \rightarrow +\infty$. En passant à la limite $\mathbb{L}^2$ dans l'égalité martingale pour X^n aux temps s et r ,

$$X_s^n = \mathbb{E}[X_r^n | \mathcal{F}_s], \quad s \leq r,$$

on obtient que Y est une martingale sur $[0, t]$:

$$Y_s = \mathbb{E}[Y_r | \mathcal{F}_s], \quad s \leq r.$$

Finalement, X^{n_k} converge p.s. uniformément sur $[0, t]$ vers un $Y = (Y_s)_{0 \leq s \leq t}$ qui est à trajectoires continues. Le processus Y est donc une martingale continue.

Puis par un calcul simple, pour tout $n \geq 1$ et $j \in \{1, \dots, r_n\}$, on a

$$M_{t_j^n}^2 - 2X_{t_j^n}^n = \sum_{i=1}^j (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2. \quad (5.7)$$

Donc le processus $M^2 - 2X^n$ est croissant le long de la subdivision $\{t_i^n : 0 \leq i \leq r_n\}$. En passant à la limite avec la sous-suite $n_k \rightarrow +\infty$ trouvée précédemment (pour laquelle il y a convergence presque sûre), par continuité, la fonction $s \in [0, t] \mapsto M_s^2 - 2Y_s$ est p.s. croissante sur $[0, t]$.

On pose alors, pour $s \in [0, t]$, $\langle M, M \rangle_s = M_s^2 - 2Y_s$ (avec, par convention, $\langle M, M \rangle_s = 0$ sur l'ensemble de probabilité nulle où la fonction $t \mapsto M_t^2 - 2Y_s$ n'est pas croissante). Ainsi, $\langle M, M \rangle$ est un processus croissant et $M_s^2 - \langle M, M \rangle_s = 2Y_s$ est une martingale, sur l'intervalle de temps $[0, t]$.

Rappelons que t est fixé depuis le début de la preuve. Pour étendre la définition de $\langle M, M \rangle_s$ à tout $s \in \mathbb{R}^+$, on applique ce qui précède avec $t = k$ pour tout entier $k \geq 1$, en remarquant que, par unicité, le processus obtenu avec $t = k$ doit être la restriction à $[0, k]$ de celui obtenu avec $t = k+1$. On a ainsi construit un processus $\langle M, M \rangle_t$, $t \geq 0$, croissant vérifiant (5.5).

La partie unicité montre aussi que le processus $\langle M, M \rangle_t$ ne dépend pas de la suite de subdivisions choisies pour le construire. On déduit alors de (5.7) (avec $j = r_n$) que pour tout $t > 0$, pour n'importe quelle suite de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ de pas tendant vers 0, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{r_n} (M_{t_j^n} - M_{t_{j-1}^n})^2 = \langle M, M \rangle_t \quad \text{dans } \mathbb{L}^2.$$

Cela achève la preuve du théorème dans le cas borné;

- (b) • On considère maintenant une martingale locale générale qu'on écrit sous la forme $M_t = M_0 + N_t$. On a donc $M_t^2 = M_0^2 + 2M_0N_t + N_t^2$ et en remarquant que M_0N_t est une martingale locale (car N en est une et M_0 est $\mathcal{F}_0$ -mesurable), on ne perd pas en généralité en supposant que $M_0 = 0$. On pose alors

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\},$$

et on applique le résultat vu dans le cas borné aux martingales bornées M^{T_n} . Notons $A^n = \langle M^{T_n}, M^{T_n} \rangle$ le processus associé à M^{T_n} . D'après l'unicité, les processus $A_{t \wedge T_n}^{n+1}$ et A_t^n sont indistinguables. On en déduit qu'il existe un processus croissant A tel que pour tout n , $A_{t \wedge T_n}$ et A_t^n sont indistinguables. Par construction du cas borné, $M_{t \wedge T_n}^2 - A_{t \wedge T_n} = (M_t^2 - A_t)^{T_n}$ est une martingale, i.e. $M_t^2 - A_t$ est une martingale locale. On prend alors $\langle M, M \rangle_t = A_t$ et cela termine la preuve pour la partie existence.

- Enfin, la deuxième partie du théorème reste vraie dans le cas d'une martingale locale : en effet, si on remplace M et $\langle M, M \rangle_t$ par M^{T_m} et $\langle M^{T_m}, M^{T_m} \rangle_t = \langle M, M \rangle_t^{T_m}$, alors le cas borné assure

$$\langle M, M \rangle_{t \wedge T_m} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{r_n} (M_{t_i^n}^{T_m} - M_{t_{i-1}^n}^{T_m})^2 \quad \text{en probabilité.}$$

On conclut en observant que pour tout $t > 0$, on a $\mathbb{P}(T_m \geq t) \rightarrow 1$, quand $m \rightarrow +\infty$. □

5.3 Extension/généralisation de l'intégrale stochastique

Nous allons définir des intégrales stochastiques avec des intégrands plus généraux que ceux considérés précédemment.

Notation : Soient $\Lambda_{loc}^0 = \{\Phi = (\Phi_t)_{t \geq 0} \text{ progressif tel que } \int_0^t \Phi_s^2 ds < +\infty \text{ p.s. } \forall t \geq 0\}$.

On va maintenant définir l'intégrale stochastique pour $\Phi \in \Lambda_{loc}^0$. Pour cela, on va introduire des temps d'arrêt.

Lemme 5.39. Soit $\Phi \in \Lambda_{loc}^0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit τ_n par

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \Phi_s^2 ds \geq n\}.$$

Alors τ_n est un temps d'arrêt.

Preuve : τ_n est un $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt car c'est le temps d'entrée du processus continu $\int_0^t \Phi_s^2 ds$ dans le fermé $[n, +\infty[$. Plus rigoureusement,

$$\{\tau_n \leq t\} = \left\{ \sup_{s \leq t} \int_0^s \Phi_u^2 du \geq n \right\} = \left\{ \forall k > 0 \exists s \leq t \int_0^s \Phi_u^2 du > n - \frac{1}{k} \right\} = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{s \in [0, t] \cap \mathbb{Q}} \left\{ \int_0^s \Phi_u^2 du > n - \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{F}_t.$$

□

Lemme 5.40. Soit τ un temps d'arrêt. Le processus $\{\mathbb{1}_{[0, \tau]}(t); t \geq 0\}$ est progressivement mesurable.

Preuve : Soit $T > 0$, il faut montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \Omega \times [0, T] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, t) &\mapsto \mathbb{1}_{[0, \tau(\omega)]}(t) \end{aligned}$$

est $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}([0, T])$ -mesurable. Ψ est la composée des deux applications suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\Omega \times [0, T], \mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}([0, T])) & \rightarrow ([0, T] \times [0, T], \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}([0, T])) \\ (\omega, t) & \mapsto (t, \tau(\omega) \wedge T) \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} ([0, T] \times [0, T], \mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}([0, T])) & \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ (u, t) & \mapsto \mathbb{1}_{\{u < t\}}. \end{array} \right.$$

Elles sont respectivement $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}([0, T])$ -mesurables et $\mathcal{B}([0, T]) \otimes \mathcal{B}([0, T])$ -mesurables et Ψ est la composée de ces deux fonctions et est donc elle-même $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}([0, T])$ -mesurable. □

Il découle du lemme précédent et du fait que $\mathbb{E} \int_0^{\tau_n} \Phi_s^2 ds \leq n$, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \Phi \in \Lambda_{loc}^0$,

$$\mathbb{1}_{[0, \tau_n]} \Phi \in \Lambda^2.$$

On peut alors définir pour tout n ,

$$M_t^n = \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}(s) \Phi_s dB_s, \quad t \geq 0.$$

Pour n fixé, le processus $M^n = (M_t^n)_{t \geq 0}$ est une martingale et on a $\langle M^n \rangle_t = \int_0^t \Phi_s^2 \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}(s) ds$. Il faut donc montrer que pour tout $T > 0$, M_t^n converge p.s. uniformément pour $t \in [0, T]$ quand $n \rightarrow +\infty$. Le processus limite sera alors noté

$$M_t = \int_0^t \Phi_s dB_s, \quad t \geq 0.$$

Lemme 5.41. Soit $\Phi \in \Lambda_{loc}^2$ et τ un temps d'arrêt. Alors $\mathbb{1}_{[0, \tau]} \Phi \in \Lambda_{loc}^2$ et pour tout $t \geq 0$,

$$\int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau]}(s) \Phi_s dB_s = \int_0^{t \wedge \tau} \Phi_s dB_s, \quad p.s.$$

Preuve : D'après le Lemma (5.40), $\mathbb{1}_{[0, \tau]} \Phi \in \Lambda_{loc}^2$. L'égalité annoncée est équivalente au même résultat avec le temps d'arrêt borné $t \wedge \tau$. Or $t \wedge \tau$ est limite décroissante de la suite de temps d'arrêt

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{N+1} t_n^k \mathbb{1}_{\{t_n^{k-1} < t \wedge \tau \leq t_n^k\}}, \quad \text{avec } t_n^k = \frac{k}{2n},$$

et on note $A_n^k = \{t_n^{k-1} < t \wedge \tau \leq t_n^k\}$. Il suffit détablir l'égalité suivante :

$$\int_0^t \mathbb{1}_{[\tau_n, t]}(s) \Phi_s dB_s = \int_{t \wedge \tau_n}^t \Phi_s dB_s,$$

qui résulte de

$$\int_{t_n^k}^t \mathbb{1}_{A_n^k} \Phi_s dB_s = \mathbb{1}_{A_n^k} \int_{t_n^k}^t \Phi_s dB_s.$$

On va donc montrer que pour $0 \leq s < t$, $A \in \mathcal{F}_s$ et $\Phi \in \Lambda_{loc}^2$,

$$\int_s^t \mathbb{1}_A \Phi_u dB_u = \mathbb{1}_A \int_s^t \Phi_u dB_u.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\int_s^t \mathbb{1}_A \Phi_u dB_u - \mathbb{1}_A \int_s^t \Phi_u dB_u \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \mathbb{1}_A \mathbb{E} \left[\left(\int_s^t (\mathbb{1}_A - 1) \Phi_u dB_u \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] + \mathbb{1}_{A^c} \mathbb{E} \left[\left(\int_s^t \mathbb{1}_A \Phi_u dB_u \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{1}_A \mathbb{E} \left[\int_s^t \mathbb{1}_{A^c} \Phi_u^2 du \right] + \mathbb{1}_{A^c} \mathbb{E} \left[\int_s^t \mathbb{1}_A \Phi_u^2 du \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_{t \wedge \tau_n} = M_t^n$ et $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de temps d'arrêt qui tend vers $+\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. La limite sera donc une martingale locale.

Proposition 5.42. Soient $\Phi \in \Lambda_{loc}^0$ et $T > 0$, alors M_t^n converge p.s. uniformément sur $[0, T]$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Preuve : Soit $n < m$. Alors $\tau_n < \tau_m$ et le lemme précédent appliqué à $\mathbb{1}_{[0, \tau_m]} \Phi$ et τ_n assure que

$$\begin{aligned} M_t^n &= \int_0^t \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}(s) \mathbb{1}_{[0, \tau_m]}(s) \Phi_s dB_s \\ &= \int_0^{t \wedge \tau_n} \mathbb{1}_{[0, \tau_m]}(s) \Phi_s dB_s \end{aligned}$$

et cette dernière quantité ne dépend pas de m . Fixons $T > 0$, sur $\Omega_n = \{\tau_n \geq T\}$, la suite $\{M_t^n; 0 \leq t \leq T\}$, est constante et égale à sa limite. Le résultat découle alors du fait que $\Omega_n \nearrow \Omega$ p.s. $\square$

Nous pouvons résumer les propriétés de l'intégrale d'Itô obtenue.

Proposition 5.43. *Pour tout $\Phi \in \Lambda_{loc}^0$ continu, il existe un processus continu*

$$M_t = \int_0^t \Phi_s dB_s, \quad t \geq 0.$$

1. *Le processus $M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale.*

2. *Le processus croissant associé à M est*

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \Phi_s^2 ds.$$

C'est le seul processus croissant, continu, adapté, nul en 0 tel que $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ soit une martingale locale.

Récapitulatif sur l'intégrale stochastique :

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, $(B_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien réel et $\Phi = (\Phi_t)_{t \geq 0}$ un processus progressivement mesurable. On peut définir l'intégrale stochastique de deux manières :

$\mathbb{E} \int_0^t \Phi_s^2 ds < +\infty \forall t \geq 0$ $M_t = \int_0^t \Phi_s dB_s$ est alors bien définie $M = (M_t)_{t \geq 0}$ processus, $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable, d'espérance nulle et à trajectoires continues $\mathbb{E} \left[\int_0^t \Phi_s dB_s \right] = 0$ $\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \Phi_s dB_s \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \Phi_s^2 ds \right],$ $\langle M \rangle_t$ unique processus croissant, à trajectoires continues, adapté, partant de 0 et tel que $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ $\mathcal{F}_t$-martingale $\langle M \rangle_t = \int_0^t \Phi_s^2 ds$	$\int_0^t \Phi_s^2 ds < +\infty$ p.s. $\forall t \geq 0$ (condition plus faible) $M_t = \int_0^t \Phi_s dB_s$ est alors bien définie $M = (M_t)_{t \geq 0}$ processus, $\mathcal{F}_t$-martingale locale, i.e. $\exists (T_n)_{n \geq 0}, T_n \nearrow +\infty, T_n \leq T_{n+1}$ telle que $(M_{t \wedge T_n})_{t \geq 0}$ martingale et $T_n = \inf \{t : \int_0^t \Phi_s^2 ds \geq n\}$ $\mathbb{E}[M_{t \wedge T_n} \mathcal{F}_s] = M_{s \wedge T_n}, \forall 0 \leq s \leq t, \forall n \geq 0$ $\triangleq \mathbb{E} \left[\int_0^t \Phi_s dB_s \right] = ?$ M_t n'est pas forcément intégrable $\langle M \rangle_t$ unique processus croissant, à trajectoires continues, adapté, partant de 0 et tel que $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ $\mathcal{F}_t$-martingale locale $\langle M \rangle_t = \int_0^t \Phi_s^2 ds$
--	--

$\Rightarrow$
la réciproque est fausse

5.4 Processus d'Itô

Dans cette partie, on donne la formule d'Itô, véritable clef de voûte du calcul stochastique. Celle-ci montre que lorsqu'on applique une application C^2 à une semi-martingale, on conserve une semi-martingale; elle en donne en plus la décomposition (martingale locale + processus à variation finie).

Définition 5.44. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $(B_t)_{t \geq 0}$ un $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien standard. On appelle processus d'Itô, un processus de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Phi_s dB_s + \int_0^t \alpha_s ds,$$

où

- X_0 est une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ -mesurable,
- Φ processus progressif tel que $\int_0^t \Phi_s^2 ds < +\infty$ p.s. $\forall t \geq 0$, i.e. $\int_0^t \Phi_s dB_s$ est une martingale locale,
- α adapté, $\int_0^t |\alpha_s| ds < +\infty$ p.s. $\forall t \geq 0$, i.e. $\int_0^t \alpha_s ds$ est un processus à variation finie.

Définition 5.45. Soient deux processus d'Itô

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t \Phi_s dB_s + \int_0^t \alpha_s ds \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t \Psi_s dB_s + \int_0^t \beta_s ds. \end{aligned}$$

On définit le processus

$$\langle X, Y \rangle_t = \int_0^t \Phi_s \Psi_s ds = \left\langle \int_0^\cdot \Phi_s dB_s, \int_0^\cdot \Psi_s dB_s \right\rangle_t.$$

Remarque 5.46. Le crochet de deux processus d'Itô est par définition le crochet de leurs parties martingales locales.

Proposition 5.47. Si $\tau_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{r_n}^n = t\}$ avec $|\text{pas } \tau_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

$$\sum_{i=0}^{r_n-1} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})(Y_{t_{i+1}^n} - Y_{t_i^n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \langle X, Y \rangle_t.$$

et

$$\langle X, Y \rangle_t = \frac{1}{4} [\langle X + Y \rangle_t - \langle X - Y \rangle_t],$$

où $\langle X + Y \rangle_t$ est le seul processus continu, croissant, adapté tel que $\left(\int_0^t (\Phi_s + \Psi_s) dB_s \right)^2 - \langle X + Y \rangle_t$ soit une martingale locale.

Preuve : admis

Définition 5.48 (Intégration par rapport à un processus d'Itô). Soit $X_t = X_0 + \int_0^t \Phi_s dB_s + \int_0^t \alpha_s ds$ et $U = (U_s)_{s \geq 0}$ tel que $\int_0^t (U_s^2 \Phi_s^2 + |U_s \alpha_s|) ds < +\infty$ p.s. $\forall t \geq 0$. Par définition

$$\int_0^t U_s dX_s = \underbrace{\int_0^t U_s \Phi_s dB_s}_{\text{martingale locale}} + \underbrace{\int_0^t U_s \alpha_s ds}_{\text{processus à variation finie}}.$$

Théorème 5.49 (Formule d'Itô, produit de deux processus d'Itô). Soient deux processus d'Itô :

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t \Phi_s dB_s + \int_0^t \alpha_s ds \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t \Psi_s dB_s + \int_0^t \beta_s ds. \end{aligned}$$

Alors

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \langle X, Y \rangle_t. \quad (5.8)$$

Preuve : • Existence des différents termes :

$\int_0^t X_s dY_s = \int_0^t X_s \Psi_s dB_s + \int_0^t X_s \beta_s ds$ a un sens car

$$\int_0^t X_s^2 \Psi_s^2 ds \leq \sup_{s \in [0, t]} X_s^2 \int_0^t \Psi_s^2 ds < +\infty p.s.$$

$$\int_0^t |X_s \beta_s| ds \leq \sup_{s \in [0, t]} |X_s| \int_0^t |\beta_s| ds < +\infty p.s.,$$

car les trajectoires des processus sont continues.

$\langle X, Y \rangle_t$ est l'unique processus continu à variation finie tel que $\left(\int_0^t \Phi_s dB_s \right) \left(\int_0^t \Psi_s dB_s \right) - \langle X, Y \rangle_t$ soit une $\mathcal{F}_t$ -martingale locale. On a

$$\langle X, Y \rangle_t = \left\langle \int_0^\cdot \Phi_s dB_s, \int_0^\cdot \Psi_s dB_s \right\rangle_t$$

$$\langle X, Y \rangle_t = \frac{1}{4} [\langle X + Y \rangle_t - \langle X - Y \rangle_t]$$

$$X_t Y_t = \frac{1}{4} [(X_t + Y_t)^2 - (X_t - Y_t)^2]$$

- Il suffit de montrer (5.8) pour le carré :

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \langle X \rangle_t.$$

Soit $\Pi^n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{r_n}^n = t\}$ avec $|\Pi^n| = \sup_{i=0, \dots, r_n-1} |t_{i+1}^n - t_i^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On peut alors écrire

$$X_t^2 - X_0^2 = \sum_{i=0}^{r_n-1} (X_{t_{i+1}^n}^2 - X_{t_i^n}^2) = 2 \underbrace{\sum_{i=0}^{r_n-1} X_{t_i^n} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \int_0^t X_s dX_s} + \underbrace{\sum_{i=0}^{r_n-1} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} \langle X \rangle_t}.$$

On en déduit que

$$X_t^2 = X_0^2 + 2 \int_0^t X_s dX_s + \underbrace{\langle X \rangle_t}_{\text{terme supplémentaire par rapport à l'intégrale de Stieljes, du fait que } X \text{ ne soit pas à variation finie}}.$$

□

Théorème 5.50 (Formule d'Itô). *Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Itô et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 . Alors $(f(X_t))_{t \geq 0}$ est un processus d'Itô tel que*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X \rangle_s. \quad (5.9)$$

Idée de preuve : Soit $X_s = X_0 + \int_0^s \Phi_u dB_u + \int_0^s \alpha_u du$. On a

$$s \mapsto f'(X_s) \text{ continue,}$$

$$s \mapsto f''(X_s) \text{ continue,}$$

$$\langle X \rangle_s = \int_0^s \Phi_u^2 du.$$

Il faut se donner une subdivision de $[0, t]$ et appliquer un développement de Taylor. □

$$\begin{aligned} (5.9) \Leftrightarrow f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) [\Phi_s dB_s + \alpha_s ds] + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \Phi_s^2 ds \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \Phi_s dB_s + \int_0^t \left(f'(X_s) \alpha_s + \frac{1}{2} f''(X_s) \Phi_s^2 \right) ds \end{aligned}$$

Exemple 5.51. Montrons que $Y_t = e^{B_t}$ est un processus d'Itô.

- $t \mapsto B_t$ est un processus d'Itô :

$$B_t = \underbrace{B_0}_{=0} + \int_0^t 1 dB_s + \int_0^t 0 ds$$

- $f : x \mapsto e^x$ est une fonction C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$ et $f''(x) = e^x$. On applique la formule d'Itô à $f(B_t)$:

$$\begin{aligned} f(B_t) &= f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) d\langle B \rangle_s \\ \Leftrightarrow e^{B_t} &= 1 + \underbrace{\int_0^t e^{B_s} dB_s}_{\text{martingale locale}} + \frac{1}{2} \int_0^t e^{B_s} ds, \end{aligned}$$

puisque $\langle B \rangle_s = \int_0^s 1^2 ds = s$.

Théorème 5.52. Soit $X = (X_t)_{t \geq 0}$ un processus d'Itô et $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$:

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (t, x) & \mapsto & f(t, x) \end{array} \quad f \text{ est } C^1 \text{ en } t \text{ et } C^2 \text{ en } x. \text{ Alors on a :}$$

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) d\langle X \rangle_s. \quad (5.10)$$

Remarque 5.53.

1. Le théorème se démontre à l'aide de la formule de Taylor pour $f(t, x)$.
2. $Y_t = (t, X_t)$ est un processus d'Itô de dimension 2. En effet, $t \mapsto t$ est aussi un processus d'Itô : $t = 0 + \int_0^t 0 dB_s + \int_0^t 1 ds$
3. On peut réécrire (5.10) :

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) [\Phi_s dB_s + \alpha_s ds] + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) \Phi_s^2 ds \\ &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) \Phi_s dB_s + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) \alpha_s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) \Phi_s^2 \right] ds \end{aligned}$$

Exemple 5.54. Montrons que si $X_t = X_0 + \int_0^t \Phi_s dB_s + \int_0^t \alpha_s ds$ est un processus d'Itô, $Y_t = t^2 \sin X_t$ est un processus d'Itô.

$$\text{On a } a(t, X_t), \quad \begin{array}{ccc} t & \mapsto & t^2 \sin x \\ x & \mapsto & t^2 \sin x \end{array} \quad \begin{array}{c} C^1 \\ C^2 \end{array} \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned} f(t, x) &= t^2 \sin x, & \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) &= 2t \sin x, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) &= t^2 \cos x, & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) &= -t^2 \sin x. \end{aligned}$$

On applique donc la formule d'Itô

$$\begin{aligned} t^2 \sin X_t &= 0 + \int_0^t 2s \sin X_s ds + \int_0^t s^2 \cos X_s dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t -s^2 \sin X_s d\langle X \rangle_s \\ &= \int_0^t s^2 \cos X_s \Phi_s dB_s + \int_0^t [2s \sin X_s + s^2 \cos X_s \alpha_s - \frac{1}{2} s^2 \sin X_s \Phi_s^2] ds \end{aligned}$$

Calculer $\langle Y \rangle_t$ (le crochet existe uniquement si Y est un processus d'Itô, pour montrer que c'en est un, il faut utiliser la formule (5.10)). On trouve

$$\langle Y \rangle_t = \int_0^t s^4 \cos^2 X_s \Phi_s^2 ds.$$

5.5 Cas multidimensionnel

Définition 5.55. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Un mouvement brownien d -dimensionnel est un processus $B = (B^1, \dots, B^d)$ tel que $\forall i = 1, \dots, d$, $B^i = (B_t^i)_{t \geq 0}$ soit un mouvement brownien et $(B^1, \dots, B^d)$ soient indépendants.

Définition 5.56. Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Un processus $B = (B_t)_{t \geq 0} = (B_t^1, \dots, B_t^d)_{t \geq 0}$ adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est un $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien d -dimensionnel si

1. $B_0 = (B_0^1, \dots, B_0^d) = (0, \dots, 0)$,
2. les trajectoires sont p.s. continues,
3. $\forall 0 \leq s < t$, $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ (ce n'est pas forcément la filtration propre de B),
4. $\forall 0 \leq s < t$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, (t-s)I_d)$, où I_d est la matrice identité de dimension d .

Proposition 5.57. Soit $B = (B^1, \dots, B^d)$ un $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien.

1. $\forall i = 1, \dots, d$, $(B^i)^2 = ((B_t^i)^2)_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$ -sous-martingale,
2. $\forall i, j = 1, \dots, d$, $i \neq j$, $B^i B^j = (B_t^i B_t^j)_{t \geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$ -martingale.

Preuve :

1. En appliquant la formule d'Itô, on obtient

$$(B_t^i)^2 = 2 \int_0^t B_s^i dB_s^i + t.$$

On a

$$\mathbb{E} \left[\int_0^t (B_s^i)^2 ds \right] = \int_0^t \mathbb{E} \left[(B_s^i)^2 \right] ds = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2} < +\infty,$$

on en déduit que $B \in \Lambda_{loc}^2$ et que $\int_0^t B_s^i dB_s^i$ est une martingale de carré intégrable. On a donc pour $t > s$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B_t^i)^2 | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} \left[\left(2 \int_0^t B_u^i dB_u^i + t \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= 2 \int_0^s B_u^i dB_u^i + t \\ &= (B_s^i)^2 + (t-s) \\ &> (B_s^i)^2. \end{aligned}$$

$(B^i)^2 = ((B_t^i)^2)_{t \geq 0}$ est donc une $\mathcal{F}_t$ -sous-martingale.

2. Soient $0 \leq s < t$ et $i \neq j$, on peut écrire

$$B_t^i B_t^j - B_s^i B_s^j = B_s^i (B_t^j - B_s^j) + (B_t^i - B_s^i) B_s^j + (B_t^i - B_s^i) (B_t^j - B_s^j).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(B_t^i B_t^j - B_s^i B_s^j) | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[B_s^i (B_t^j - B_s^j) | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s^j (B_t^i - B_s^i) | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[(B_t^i - B_s^i) (B_t^j - B_s^j) | \mathcal{F}_s] \\ &= \underbrace{B_s^i \mathbb{E}[B_t^j - B_s^j | \mathcal{F}_s]}_{\text{car } B_s^i \text{ est } \mathcal{F}_s\text{-mesurable}} + \underbrace{B_s^j \mathbb{E}[B_t^i - B_s^i | \mathcal{F}_s]}_{\text{car } B_s^j \text{ est } \mathcal{F}_s\text{-mesurable}} + \mathbb{E}[(B_t^i - B_s^i) (B_t^j - B_s^j) | \mathcal{F}_s] \\ &= \underbrace{B_s^i \mathbb{E}[B_t^j - B_s^j]}_{\text{car } B_t^j - B_s^j \perp \mathcal{F}_s} + \underbrace{B_s^j \mathbb{E}[B_t^i - B_s^i]}_{\text{car } B_t^i - B_s^i \perp \mathcal{F}_s} + \underbrace{\mathbb{E}[B_t^i - B_s^i | \mathcal{F}_s] \mathbb{E}[B_t^j - B_s^j | \mathcal{F}_s]}_{\text{car } B_t^i - B_s^i \perp B_t^j - B_s^j} \\ &= 0 + 0 + \mathbb{E}[B_t^i - B_s^i] \mathbb{E}[B_t^j - B_s^j] \\ &= 0, \end{aligned}$$

$B^i B^j = (B_t^i B_t^j)_{t \geq 0}$ est donc bien une $\mathcal{F}_t$ -martingale. □

Corollaire 5.58. Soit $B = (B^1, \dots, B^d)$ un $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien d -dimensionnel. Alors,

1. $\langle B^i \rangle_t = t, \forall i = 1, \dots, d,$
2. $\langle B^i, B^j \rangle_t = 0, \forall i, j = 1, \dots, d, i \neq j.$

Preuve :

1. On a

$$(B_t^i)^2 = 2 \int_0^t B_s^i dB_s^i + t.$$

Or $\langle B^i \rangle_t$ est l'unique processus croissant adapté à trajectoires continues, partant de 0 tel que $(B_t^i)^2 - \langle B^i \rangle_t$ soit une martingale. On a vu que

$$(B_t^i)^2 - t = 2 \int_0^t B_s^i dB_s^i$$

est une martingale et

$$B_t^i = 0 + \int_0^t 1 dB_s^i + \int_0^t 0 ds$$

est un processus d'Itô. On a donc $\langle B^i \rangle_t = \int_0^t 1^2 ds = t.$

2. $(\langle B^i, B^j \rangle_t)_{t \geq 0}$ est l'unique processus à variation finie, à trajectoires continues, partant de 0 tel que $B_t^i B_t^j - \langle B^i, B^j \rangle_t$ soit une martingale locale. Or $B_t^i B_t^j - 0$ est une martingale, on en déduit que $\langle B^i, B^j \rangle_t = 0.$ □

Par extension, pour $\Phi = (\Phi_s)_{s \geq 0}$ et $\Psi = (\Psi_s)_{s \geq 0}$ deux processus progressivement mesurables réels, tels que $\int_0^t (|\Phi_s|^2 + |\Psi_s|^2) ds < +\infty$ p.s. pour tout $t \geq 0$, i.e. $M_t = \int_0^t \Phi_s dB_s^i$ et $N_t = \int_0^t \Psi_s dB_s^j$ sont des martingales locales bien définies, on a

$$\langle M, N \rangle_t = \left\langle \int_0^\cdot \Phi_s dB_s^i, \int_0^\cdot \Psi_s dB_s^j \right\rangle_t = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, d, i \neq j.$$

Mais

$$\left\langle \int_0^\cdot \Phi_s dB_s^i, \int_0^\cdot \Psi_s dB_s^i \right\rangle_t = \int_0^t \Phi_s \Psi_s ds.$$

Intégrale stochastique par rapport à $B = (B^1, \dots, B^d)$ mouvement brownien d -dimensionnel :

$$\Lambda_{loc}^d = \{ \Phi = (\Phi_s)_{s \geq 0} = (\Phi_s^1, \dots, \Phi_s^d) \in \mathbb{R}^d, \text{ progressivement mesurable tel que } \int_0^t |\Phi_s|^2 ds = \sum_{i=1}^d \int_0^t |\Phi_s^i|^2 ds < +\infty \}$$

On définit

$$M_t = \int_0^t \Phi_s dB_s = \sum_{i=1}^d \int_0^t \Phi_s^i dB_s^i.$$

$M = (M_t)_{t \geq 0}$ est une martingale locale ($\exists (T_n)_{n \geq 0}$ suite de temps d'arrêt qui tendent en croissant vers $+\infty$ telle que $(M_{t \wedge T_n})_{t \geq 0}$ soit une $\mathcal{F}_t$ -martingale). On a

$$\langle M \rangle_t = \left\langle \sum_{i=1}^d \int_0^t \Phi_s^i dB_s^i \right\rangle_t = \int_0^t \sum_{i=1}^d |\Phi_s^i|^2 ds = \int_0^t |\Phi_s|^2 ds,$$

avec $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$. Pour deux processus Φ et Ψ dans Λ_{loc}^d et $B = (B^1, \dots, B^d)$, on définit pour

$$M_t = \int_0^t \Phi_s dB_s \quad \text{et} \quad N_t = \int_0^t \Psi_s dB_s,$$

$$\langle M, N \rangle_t = \int_0^t \sum_{i=1}^d \Phi_s^i \Psi_s^i ds$$

et

$$\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{4} \left[\langle M + N \rangle_t - \langle M - N \rangle_t \right].$$

Processus d'Itô :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Phi_s dB_s + \int_0^t \alpha_s ds$$

avec

- X_0 variable aléatoire réelle $\mathcal{F}_0$ -mesurable
- $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_d) \in \Lambda_{loc}^d$
- $B = (B^1, \dots, B^d)$ $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien d -dimensionnel
- α adapté et $\int_0^t |\alpha_s| ds < +\infty$ pour tout $t \geq 0$ p.s.

Si X et Y sont deux processus d'Itô avec les conditions précédentes :

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + \int_0^t \Phi_s dB_s + \int_0^t \alpha_s ds \\ Y_t &= Y_0 + \int_0^t \Psi_s dB_s + \int_0^t \beta_s ds \end{aligned}$$

On a alors

$$\langle X, Y \rangle_t = \left\langle \int_0^t \Phi_s dB_s, \int_0^t \Psi_s dB_s \right\rangle_t = \sum_{i=1}^d \int_0^t \Phi_s^i \Psi_s^i ds.$$

Formule d'Itô : Soient $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^p)$ p processus d'Itô et $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Alors $f(X_t)$ est un processus d'Itô et on a

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^p \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(X_s) d\langle X^j, X^k \rangle_s.$$

Idée de preuve : À j fixé,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) dX_s^j &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) \left[\underbrace{\Phi_s^j dB_s}_{=\sum_{l=1,\dots,d} \Phi_s^{j,l} dB_s^l} + \alpha_s^j ds \right] \\ &= \sum_{l=1,\dots,d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) \Phi_s^{j,l} dB_s^l + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) \alpha_s^j ds \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ existence de $\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) dX_s^j$.

Exemple 5.59. Soient $B^1 = (B_t^1)_{t \geq 0}$ et $B^2 = (B_t^2)_{t \geq 0}$ deux $\mathcal{F}_t$ -mouvements browniens standards et $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, fonction de classe C^2 . On a

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 2x_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 2x_2.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} (B_t^1)^2 + (B_t^2)^2 &= \underbrace{(B_0^1)^2 + (B_0^2)^2}_{=0+0} + \int_0^t (2B_s^1 dB_s^1 + 2B_s^2 dB_s^2) + \frac{1}{2} \int_0^t (2ds + 2ds) \\ &= 2 \int_0^t B_s^1 dB_s^1 + 2 \int_0^t B_s^2 dB_s^2 + 2t. \end{aligned}$$

Rappel :

$$\begin{aligned} (B_t^1)^2 &= 2 \int_0^t B_s^1 dB_s^1 + t \\ (B_t^2)^2 &= 2 \int_0^t B_s^2 dB_s^2 + t. \end{aligned}$$

Corollaire 5.60. Soient $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^p)_{t \geq 0}$ p processus d'Itô et $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^p)$. Alors,

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^p \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^p \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s, X_s) d\langle X^i, X^j \rangle_s.$$

$Y_t = (t, X_t^1, \dots, X_t^p)$ est un processus d'Itô de dimension $p+1$ et $\langle t, X_t^i \rangle = 0$ car le processus $(t)_{t \geq 0}$ n'admet pas de partie martingale locale.

Exercice 5.61. Montrer que les processus suivants sont des processus d'Itô, calculer leurs crochets :

1. B_t^2 ,
2. $t + e^{B_t}$,
3. $B_t^3 - 3tB_t$,
4. $1 + 2t + e^{B_t}$,
5. $(B_t + t) \exp(-B_t - \frac{1}{2}t)$,
6. $e^{t/2} \sin B_t$.

Exercice 5.62. Soient

$$X_t = \exp\left(\int_0^t a(s) ds\right),$$
$$Y_t = Y_0 + \int_0^t b(s) \exp\left(-\int_0^s a(u) du\right) dB_s,$$

où a et b sont des fonctions boréliennes intégrables. Calculer $Z_t = X_t Y_t$ en tant que processus d'Itô.

Chapitre 6

Equations différentielles stochastiques

6.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier les équations différentielles stochastiques (EDS) de la forme :

$$\begin{cases} dX_t &= f(t, X_t)dt + g(t, X_t)dB_t \\ X_0 &= x \end{cases} \quad (6.1)$$

qui n'a de sens qu'intégré :

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dB_s,$$

où $B = (B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien d -dimensionnel. Le coefficient $f(t, X_t)$ est appelé la dérive et le coefficient $g(t, X_t)$ est appelé coefficient de diffusion.

Nous rechercherons des solutions $X = (X_t)_{t \geq 0}$ qui sont des processus r -dimensionnels progressivement mesurables et doivent nécessairement vérifier :

$$\int_0^t |f(s, X_s)|ds < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^t |g(s, X_s)|^2 ds < \infty \quad \forall t > 0 \text{ p.s..}$$

On conviendra par la suite que

$$f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{r \times d}$$

sont des fonctions mesurables.

Problématiques :

1. Existence de solutions
2. Unicité des solutions
3. Calcul des solutions

Notations :

- $\mathbb{R}^r$ muni de la norme $|x| = (\sum_{i=1}^r x_i^2)^{1/2}$,
- $M(r, d)$ matrices à coefficients réels à r lignes et d colonnes,
- $A \in M(r, d)$, $|A| = \sqrt{\text{tr}(A^t A)} = \left(\sum_{\substack{i=1, \dots, r \\ j=1, \dots, d}} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$,
- $A \in M(r, d)$, ${}^t A \in M(d, r)$ et $A^t A \in M(r, r)$.

6.2 Résultats préliminaires

6.2.1 Processus à valeurs matricielles

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et $B = (B^1, \dots, B^d)$ un $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien d -dimensionnel. Soit $\Phi = (\Phi_t)_{t \geq 0}$ un processus progressif à valeurs dans $M(r, d)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ \times \Omega &\rightarrow M(r, d) \\ (t, \omega) &\mapsto \Phi_t(\omega) = \left(\Phi_t^{i,j}(\omega) \right)_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq d}} \end{aligned}$$

Supposons que $\int_0^t |\Phi_s|^2 ds < +\infty$ p.s. pour tout $t \geq 0$.

On définit la martingale locale vectorielle $M = (M^1, \dots, M^r)$ par

$$M_t^i = \sum_{j=1}^d \int_0^t \Phi_s^{i,j} dB_s^j = {}^t e_i M_t = \int_0^t {}^t e_i \Phi_s dB_s, \quad \forall i = 1, \dots, r.$$

où ${}^t e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{ème position}}, 0, \dots, 0)$.

$$\underbrace{(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)}_{1 \times r} \underbrace{(\Phi_s)}_{r \times d} = (\Phi_s^{i,1}, \Phi_s^{i,2}, \dots, \Phi_s^{i,d}).$$

On écrit matriciellement $M_t = \int_0^t \Phi_s dB_s$:

$$M_t = \begin{pmatrix} M_t^1 \\ \vdots \\ M_t^r \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} \Phi_s^{11} & \dots & \Phi_s^{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_s^{r1} & \dots & \Phi_s^{rd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_s^1 \\ \vdots \\ dB_s^d \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \langle M^i, M^j \rangle_t &= \left\langle \int_0^t {}^t e_i \Phi_s dB_s, \int_0^t {}^t e_j \Phi_s dB_s \right\rangle_t \\ &= \int_0^t ({}^t e_i \Phi_s {}^t \Phi_s e_j) ds \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^d \int_0^t \Phi_s^{i,k} dB_s^k, \sum_{l=1}^d \int_0^t \Phi_s^{j,l} dB_s^l \right\rangle_t. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\langle B^k, B^l \rangle = 0$ pour tout $k \neq l$, on obtient

$$\langle M^i, M^j \rangle_t = \sum_{k=1}^d \int_0^t \Phi_s^{i,k} \Phi_s^{j,k} ds.$$

Si de plus, $\mathbb{E}\left[\int_0^t |\Phi_s|^2 ds\right] < +\infty$ pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|\underbrace{\int_0^t \Phi_s dB_s}_{\text{martingale vectorielle}}\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^r |M_t^k|^2\right] \\ &= \sum_{k=1}^r \mathbb{E}[|M_t^k|^2] \\ &= \sum_{k=1}^r \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t e_k \Phi_s dB_s\right|^2\right] \\ &= \sum_{k=1}^r \mathbb{E}\left[\int_0^t |e_k \Phi_s|^2 ds\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^t |\Phi_s|^2 ds\right] \end{aligned}$$

On retrouve bien

$$\mathbb{E}\left[\left|\underbrace{\int_0^t \Phi_s dB_s}_{\text{martingale vectorielle}}\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^r |M_t^k|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t |\Phi_s|^2 ds\right].$$

6.2.2 Processus d'Itô vectoriel

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré et $B = (B^1, \dots, B^d)$ un mouvement brownien d -dimensionnel.

Définition 6.1. On appelle processus d'Itô vectoriel un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^r$ de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Phi_s dB_s + \int_0^t \alpha_s ds,$$

avec

- X_0 vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^r$, $\mathcal{F}_0$ -mesurable,
- $\Phi = (\Phi_t)_{t \geq 0}$ un processus progressif à valeurs dans $M(r, d)$ tel que $\int_0^t |\Phi_s|^2 ds < +\infty$ p.s. pour tout t ,
- $\alpha = (\alpha_t)_{t \geq 0}$ un processus progressif à valeurs dans $\mathbb{R}^r$ tel que $\int_0^t |\alpha_s| ds < +\infty$ p.s. pour tout t .

$\triangleq$ "d $X_t = \Phi_t dB_t + \alpha_t dt$ " n'a de sens qu'intégré.

Formule d'Itô : Soient $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^r)$ et X un processus d'Itô à valeurs dans $\mathbb{R}^r$.

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \sum_{k=1}^r \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_k}(s, X_s) dX_s^k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1,\dots,r} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(s, X_s) d\langle X^k, X^l \rangle_s \\ f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) ds + \sum_{k=1}^r \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_k}(s, X_s) [{}^t e_k \Phi_s dB_s + \alpha_s^k ds] + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1,\dots,r} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}(s, X_s) {}^t e_k \Phi_s {}^t \Phi_s e_l ds \end{aligned}$$

En notant $\nabla_x f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_r}\right)$ et $D_x^2 f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1 \leq i, j \leq r}$ on peut écrire

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \nabla_x f(s, X_s) \Phi_s dB_s + \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + \nabla_x f(s, X_s) \alpha_s + \frac{1}{2} \text{tr}[D_x^2 f(s, X_s) \Phi_s^t \Phi_s] \right] ds.$$

6.3 Existence et unicité de la solution

Définition 6.2. Soit $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^r \rightarrow M(r, d)$ ou $\mathbb{R}^r$. On dit que f est "localement bornée" si $\forall T \geq 0$ et K compact de $\mathbb{R}^r$, $f(t, x)$ est bornée sur $[0, T] \times K$.

6.3.1 Position du problème

Soient r et d deux entiers positifs, σ et b deux fonctions déterministes, mesurables, localement bornées définies sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^r$ et à valeurs respectivement dans $M(r, d)$ et $\mathbb{R}^r$:

$$(t, \omega) \mapsto \sigma(t, \omega) = (\sigma_{ij}(t, \omega))_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq d}} \quad [\text{coefficients de diffusion/volatilité}]$$

$$(t, \omega) \mapsto b(t, \omega) = (b^1(t, \omega), \dots, b^r(t, \omega)) \quad [\text{drift/dérive/tendance}]$$

Définition 6.3. Une solution de $E(\sigma, b)$:

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt$$

est la donnée de :

- un espace de probabilité filtré usuel $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$,
- sur cet espace un $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -mouvement brownien de dimension d , $B = (B^1, \dots, B^d)$,
- un processus $\mathcal{F}_t$ -adapté, continu, à valeurs dans $\mathbb{R}^r$ tel que

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds$$

$$\begin{pmatrix} X_t^1 \\ \vdots \\ X_t^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0^1 \\ \vdots \\ X_0^r \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \sigma_{11}(s, X_s) & \dots & \sigma_{1d}(s, X_s) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{r1}(s, X_s) & \dots & \sigma_{rd}(s, X_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_s^1 \\ \vdots \\ dB_s^d \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} b_1(s, X_s) \\ \vdots \\ b_r(s, X_s) \end{pmatrix} ds$$

Si $X_0 \equiv x \in \mathbb{R}^r$, le processus est solution de $E_x(\sigma, b)$.

En pratique (dans les cas simples), pour trouver la solution d'une EDS, on intuite la forme de la solution et on vérifie que l'EDS de départ est bien satisfaite en appliquant la formule d'Itô.

Exemple 6.4. Les EDS affines admettent des solutions explicites qu'on peut obtenir comme dans le cas déterministe par la méthode de variation de la constante. Le cas affine est important car les EDS affines apparaissent comme des linéarisées d'EDS plus complexes qu'on ne sait pas toujours résoudre. On se place dans le cas réel, i.e. $d = r = 1$.

Considérons l'équation de Langevin définie pour $b(t, x) = -ax$ ($a > 0$) et $\sigma(t, x) = \sigma$:

$$dX_t = -aX_t dt + \sigma dB_t.$$

La solution est donnée par

$$X_t = X_0 e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dB_s. \quad (6.2)$$

Sans le terme σdB_t , l'équation $dX_t = -aX_t dt$ se résout immédiatement en $X_t = Ce^{-at}$. Pour tenir compte du terme σdB_t , on fait "varier la constante C " :

$$dC_t e^{-at} - aC_t e^{-at} dt = dX_t = -aX_t dt + \sigma dB_t$$

$$dC_t = \sigma e^{at} dB_t$$

$$C_t = X_0 + \int_0^t \sigma e^{as} dB_s$$

et, avec $X_t = C_t e^{-at}$, l'expression (6.2) est obtenue. Il s'agit du processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Définition 6.5 (Plusieurs notions d'existence et unicité).

1. On dit qu'il y a **existence faible** si pour tout $x \in \mathbb{R}^r$, il existe une solution de $E_x(\sigma, b)$.
2. On dit qu'il y a **existence et unicité faibles** si x étant fixé, toutes les solutions de $E_x(\sigma, b)$ ont même loi.
3. On dit qu'il y a **unicité trajectorielle** si $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}, B)$ étant fixé, deux solutions X et X' de $E_x(\sigma, b)$ telles que $X_0 = X'_0$ sont indistingables $[\mathbb{P}(X_t = X'_t, \forall t \geq 0) = 1]$.
4. On dit que X solution de $E_x(\sigma, b)$ est **forte** si X est adapté à la filtration canonique de B ($\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$).

Le théorème suivant relie les différentes notions d'existence et d'unicité.

Théorème 6.6 (Yamada-Watanabe). *Si il y a existence faible et unicité trajectorielle, alors il y a aussi unicité faible. De plus, pour tout choix de l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ et du $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien B , il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^r$ une unique solution forte de $E_x(\sigma, b)$.*

Nous omettons la preuve car nous n'utiliserons pas ce résultat dans la suite : dans le cadre lipschitzien que nous considérerons, nous pourrons établir directement les propriétés de la conclusion du théorème de Yamada-Watanabe.

6.3.2 Existence et unicité trajectorielles dans le cas lipschitzien

Nous donnons ici des résultats généraux d'existence et d'unicité des EDS.

Hypothèse 6.7.

1. $(t, x) \mapsto \sigma(t, x)$ et $b(t, x)$ continues sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^r$
2. $(t, x) \mapsto \sigma(t, x)$ et $b(t, x)$ lipschitziennes en x : $\exists K \geq 0, \forall t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}^r$,

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y| \quad \text{et} \quad |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|.$$

Théorème 6.8. *Sous les hypothèses 6.7, il y a unicité trajectorielle pour $E(\sigma, b)$. De plus, pour tout $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ et tout $\mathcal{F}_t - \mathbb{P}$ -mouvement brownien $B = (B^1, \dots, B^d)$ dessus, il existe pour chaque $x \in \mathbb{R}^r$ une (unique) solution forte à $E_x(\sigma, b)$.*

Le théorème entraîne en particulier qu'il y a existence faible pour $E(\sigma, b)$.

Remarque 6.9. *On peut affaiblir l'hypothèse de continuité en la variable t , qui n'intervient essentiellement que pour majorer $\sup_{t \in [0, T]} |\sigma(t, x)|$ et $\sup_{t \in [0, T]} |b(t, x)|$ pour x fixé. On peut aussi localiser l'hypothèse sur le caractère lipschitzien de σ et b (la constante K dépendra du compact sur lequel on considère t et x, y), à condition de conserver une condition de croissance linéaire*

$$|\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|) \quad \text{et} \quad |b(t, x)| \leq K(1 + |x|).$$

Ce type de condition, qui sert à éviter l'explosion de la solution, intervient déjà dans les équations différentielles ordinaires.

Avant de démontrer le théorème 6.8, on démontre le lemme suivant :

Lemme 6.10 (Lemme de Gronwall). *Soit $T > 0$ et g une fonction positive, mesurable et bornée sur $[0, T]$. On suppose qu'il existe deux constantes a et b positives telles que pour tout $t \in [0, T]$,*

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds.$$

Alors,

$$g(t) \leq ae^{bt}.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
 g(t) &\leq a + b \int_0^t g(s) ds \\
 &\leq a + b \int_0^t \left[a + b \int_0^s g(u) du \right] ds \\
 &= a + abt + b^2 \int_0^t \left(\int_0^s g(u) du \right) ds \\
 &\leq a + a(bt) + a \frac{(bt)^2}{2} + \dots + a \frac{(bt)^n}{n!} + \underbrace{b^{n+1} \int_0^t ds_1 \left(\int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_n} g(s_{n+1}) ds_{n+1} \right)}_{\text{reste}}.
 \end{aligned}$$

On trouve en utilisant le fait que pour tout $t \in [0, T]$, $|g(t)| \leq K$,

$$\text{reste} \leq b^{n+1} K \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

on en déduit que $g(t) \leq ae^{bt}$. □

Preuve : [Théorème 6.8] Pour alléger les notations, on traite seulement le cas $d = r = 1$. La preuve dans le cas général utilise exactement les mêmes arguments.

1. Unicité trajectorielle :

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P}, B = (B_t)_{t \geq 0}, X = (X_t)_{t \geq 0}, X' = (X'_t)_{t \geq 0})$ tels que $X_0 = X'_0$ et

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s + \int_0^t b(s, X_s) ds \\ X'_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X'_s) dB_s + \int_0^t b(s, X'_s) ds. \end{cases}$$

On va montrer que p.s., $X_t = X'_t$, pour tout $t \geq 0$. Pour tout $M > 0$, on pose $\tau = (\tau_M) = \inf\{t : |X_t| \geq M \text{ ou } |X'_t| \geq M\}$. Pour $t \leq \tau$, on a $|X_t| \leq M$ et $|X'_t| \leq M$. τ est un temps d'arrêt car c'est le temps d'entrée dans le fermé $]-\infty, -M] \cup [M, +\infty[$ et le processus est adapté. On fixe $T > 0$, alors pour $t \in [0, T]$, on a

$$X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau} = \int_0^{t \wedge \tau} [\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)] dB_s + \int_0^{t \wedge \tau} [b(s, X_s) - b(s, X'_s)] ds,$$

et

$$(X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau})^2 \leq 2 \left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} [\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)] dB_s \right)^2 + \underbrace{\left(\int_0^{t \wedge \tau} [b(s, X_s) - b(s, X'_s)] ds \right)^2}_{\leq_{C-S} (t \wedge \tau) \int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s))^2 ds} \right].$$

En passant à l'espérance, on obtient pour $t \in [0, T]$

$$\mathbb{E}[(X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau})^2] \leq 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} [\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)] dB_s\right)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[(t \wedge \tau) \int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s))^2 ds\right].$$

On utilise ensuite l'isométrie et on obtient pour $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}[(X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau})^2] \underset{\text{isométrie}}{\leq} 2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^{t \wedge \tau} [\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)]^2 ds\right)\right] + 2\mathbb{E}\left[(t \wedge \tau) \int_0^{t \wedge \tau} (b(s, X_s) - b(s, X'_s))^2 ds\right]$$

σ et b étant lipschitziennes, on a

$$|\sigma(s, X_s) - \sigma(s, X'_s)|^2 \leq K^2 |X_s - X'_s|^2 \quad \text{et} \quad |b(s, X_s) - b(s, X'_s)|^2 \leq K^2 |X_s - X'_s|^2,$$

et en utilisant le fait que $t \wedge \tau \leq T$ pour tout $t \in [0, T]$, on en déduit que

$$\mathbb{E}[(X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau})^2] \leq 2K^2 \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau} |X_s - X'_s|^2 ds\right] + 2TK^2 \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau} |X_s - X'_s|^2 ds\right],$$

i.e.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau})^2] &\leq 2K^2(1+T) \mathbb{E}\left[\int_0^{t \wedge \tau} |X_s - X'_s|^2 ds\right] \\ &\leq 2K^2(1+T) \mathbb{E}\left[\int_0^t |X_{s \wedge \tau} - X'_{s \wedge \tau}|^2 ds\right]. \end{aligned}$$

On pose $h(t) = \mathbb{E}[(X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau})^2]$, on a donc

$$h(t) \leq 2K^2(1+T) \int_0^t h(s) ds$$

avec h mesurable, positive, bornée, on peut donc appliquer le lemme de Gronwall avec $a = 0$ et $b = 2K^2(1+T)$ et on obtient

$$h(t) \leq 0 \times e^{2K^2(1+T)t}.$$

On a donc $\mathbb{E}[(X_{t \wedge \tau} - X'_{t \wedge \tau})^2] = 0$, on en déduit que $X_{t \wedge \tau} = X'_{t \wedge \tau}$ p.s. pour tout t . En faisant tendre M vers $+\infty$, on conclut que p.s. $X_t = X'_t$ pour tout t . On a donc unicité trajectorielle.

2. Existence forte par les approximation de Picard : nous construisons la solution par la méthode d'approximation de Picard. On définit par récurrence

$$\begin{aligned} X_t^0 &= x \\ X_t^1 &= x + \int_0^t \sigma(s, X_s^0) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^0) ds \\ &\vdots \\ X_t^{n+1} &= x + \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dB_s + \int_0^t b(s, X_s^n) ds \end{aligned} \tag{6.3}$$

Les intégrales stochastiques ci-dessus sont bien définies puisque par récurrence, on constate que, pour chaque n , X_t^n est continu et adapté à $\mathcal{F}^B$ donc localement borné si bien que le processus $\sigma(t, X_t^n)$ l'est aussi (hypothèse lipschitzienne) et l'intégrale correspondante bien définie. On fixe maintenant $T > 0$ et on raisonne sur $[0, T]$. On prouve par récurrence qu'il existe C_n tel que, pour tout $t \in [0, T]$, $\mathbb{E}[|X_t^n|^2] \leq C_n$.

Lemme 6.11. *Soit $T > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante positive C_n telle que pour tout $t \in [0, T]$, $\mathbb{E}[|X_t^n|^2] \leq C_n < +\infty$.*

Preuve : [Preuve du lemme] Par récurrence :

- $\mathbb{E}[|X_t^0|^2] = x^2 < +\infty$
- on suppose que $\mathbb{E}[|X_t^{n-1}|^2] \leq C_{n-1}$
- rang n ?

On utilise l'inégalité $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$:

$$\begin{aligned} |X_t^n|^2 &\leq 3 \left[|x|^2 + \left| \int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s \right|^2 + \underbrace{\left| \int_0^t b(s, X_s^{n-1}) ds \right|^2}_{\leq \int_0^t \int_0^t |b(s, X_s^{n-1})|^2 ds} \right] \end{aligned}$$

Remarque 6.12. Si $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$, alors

$$|f(x)| = |f(x) - f(0) + f(0)| \leq |f(x) - f(0)| + |f(0)| \leq K|x| + K', \quad K, K' \geq 0.$$

On a donc

$$|\sigma(s, X_s^{n-1})|^2 \leq 2K^2 |X_s^{n-1}|^2 + 2K'^2 \quad \text{et} \quad |b(s, X_s^{n-1})|^2 \leq 2K^2 |X_s^{n-1}|^2 + 2K'^2.$$

En passant à l'espérance et en utilisant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons

$$\mathbb{E}[|\sigma(s, X_s^{n-1})|^2] \leq 2K^2 \mathbb{E}[|X_s^{n-1}|^2] + 2K'^2 \leq 2K^2 C_{n-1} + 2K'^2 \quad \forall s \in [0, T]$$

et de même pour $\mathbb{E}[|b(s, X_s^{n-1})|^2]$. On en déduit que $\int_0^t \sigma(s, X_s^{n-1}) dB_s$ est une martingale de $\mathbb{L}^2$ et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_t^n|^2] &\leq 3 \left[|x|^2 + \int_0^t \mathbb{E}[|\sigma(s, X_s^{n-1})|^2] ds + T \int_0^T \mathbb{E}[|b(s, X_s^{n-1})|^2] ds \right] \\ &\leq 3 \left[|x|^2 + T(1+T)(2K^2 C_{n-1} + 2K'^2) \right] =: C_n. \end{aligned}$$

□

On revient à la preuve du théorème 6.8. On évalue $\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right]$:

$$\begin{aligned} (X_s^{n+1} - X_s^n)^2 &\leq 2 \left| \int_0^s (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1})) dB_u \right|^2 + 2 \underbrace{\left| \int_0^s (b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1})) du \right|^2}_{\leq 2s \int_0^s |b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1})|^2 du} \\ &\leq 2 \sup_{0 \leq s \leq t} \underbrace{\left(\int_0^s (\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1})) dB_u \right)^2}_{=: M_s^2} + 2s \int_0^s |b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1})|^2 du, \end{aligned}$$

et M est une martingale de $\mathbb{L}^2$. On va utiliser l'inégalité de Doob donnée par lemme suivant :

Lemme 6.13 (Inégalité de Doob). Soit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ une martingale continue. Alors pour $p > 1$ et $T > 0$,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M_t|^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[|M_T|^p].$$

En appliquant l'inégalité de Doob, on a

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |M_s|^2 \right] \leq 4 \mathbb{E}[M_t^2].$$

On a donc par isométrie

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right] \leq 8 \mathbb{E} \left[\int_0^t |\sigma(u, X_u^n) - \sigma(u, X_u^{n-1})|^2 du \right] + 2T \mathbb{E} \left[\int_0^t |b(u, X_u^n) - b(u, X_u^{n-1})|^2 du \right].$$

Et en utilisant le fait que σ et b soient lipschitziennes, on obtient

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right] \leq (8 + 2T)K^2 \int_0^t \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, u]} |X_s^n - X_s^{n-1}|^2 \right] du. \quad (6.4)$$

On pose $g_n(t) = \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |X_s^{n+1} - X_s^n|^2 \right]$, on a alors

$$g_n(t) \leq C_T \int_0^t g_{n-1}(u) du,$$

avec $C_T = (8 + 2T)K^2$. Or chacune des fonctions g_n est bornée sur $[0, T]$. En particulier, il existe une constante C'_T telle que $g_0(t) \leq C'_T$ pour $t \in [0, T]$. Une récurrence simple montre alors que tout $n \geq 0$, $t \in [0, T]$

$$g_n(t) \leq C'_T (C_T)^n \frac{t^n}{n!}.$$

On en déduit que $\sum_{n \geq 0} (g_n(T))^{1/2} < +\infty$ et comme

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{n+1} - X_s^n| \right|_2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{n+1} - X_s^n| \right|_2 = \sum_{n \geq 0} (g_n(T))^{1/2} < +\infty, \quad (6.5)$$

où la norme $|\cdot|_2$ est définie par $|Y|_2 = \sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$ pour une variable aléatoire Y , cela entraîne que p.s.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sup_{0 \leq s \leq T} |X_s^{n+1} - X_s^n| < +\infty,$$

et donc p.s. la suite $(X_t^n)_{t \in [0, T]}$ converge uniformément sur $[0, T]$ vers un processus limite $(X_t)_{t \in [0, T]}$ qui est continu. Comme par récurrence, chaque processus X^n est adapté par rapport à la filtration canonique de B , X l'est aussi.

On déduit aussi de (6.5) que $(X_t^n)_{t \in [0, T]}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donc elle converge dans L^2 . On déduit alors de l'isométrie L^2 et des hypothèses lipschitziennes que, avec des limites dans L^2 , on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dB_s &= \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t b(s, X_s^n) ds &= \int_0^t b(s, X_s) ds \end{aligned}$$

Finalement, en passant à la limite dans l'équation de récurrence (6.3), on obtient que X est solution forte de $E_x(\sigma, b)$ sur $[0, T]$. Comme $T > 0$ était arbitraire, la preuve est complète. $\square$

Exemple 6.14. On considère l'équation $dX_t = (aX_t + b)dt + \sigma X_t dB_t$ avec

$$\begin{aligned} \sigma(s, x) &= \sigma x \\ b(s, x) &= ax + b, \end{aligned}$$

qui sont continues et lipschitziennes. Alors on a existence et unicité fortes d'une solution à cette équation.

Extension : Conditions initiales aléatoires

On se place sous l'hypothèse 6.7 et on introduit η vecteur aléatoire de dimension r , $\mathcal{F}_0$ -mesurable et tel que $\mathbb{E}[|\eta|^2] < +\infty$.

Théorème 6.15. Il existe une solution unique forte à $E(\sigma, b)$ telle que $X_0 = \eta$ notée $X^\eta = (X_t^\eta)_{t \geq 0}$ et telle que

$$X_t^\eta = \eta + \int_0^t b(s, X_s^\eta) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^\eta) dB_s.$$

Preuve : admis

Contre-exemple au théorème d'existence et d'unicité forte :

Il peut y avoir existence et unicité faibles sans qu'il y ait unicité trajectorielle.

Pour ce contre-exemple, nous avons besoin d'un résultat sur la martingale exponentielle et du théorème de Lévy.

Nous commençons par démontrer le résultat suivant :

Proposition 6.16. *Soit M une martingale locale. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, soit*

$$\mathcal{E}(\lambda M)_t = \exp\left(\lambda M_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle M \rangle_t\right).$$

Le processus $\mathcal{E}(\lambda M)_t$ est une martingale locale.

Preuve : Si $F(t, x)$ est une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, la formule d'Itô entraîne que

$$F(\langle M \rangle_t, M_t) = F(0, M_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(\langle M \rangle_s, M_s) dM_s + \int_0^t \left(\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)(\langle M \rangle_s, M_s) d\langle M \rangle_s.$$

Le processus $F(\langle M \rangle_t, M_t)$ est une martingale locale dès que sa partie à variation finie s'annule, i.e. lorsque F vérifie la condition :

$$\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

Cette condition est satisfaite par la fonction $F(t, x) = \exp(\lambda x - \frac{\lambda^2}{2} t)$ (plus précisément par les parties réelle et imaginaire de cette fonction). $\square$

Théorème 6.17 (Théorème de Lévy). *Soit $X = (X^1, \dots, X^d)$ un processus continu, $\mathcal{F}_t$ -adapté, issu de 0. Il y a équivalence entre*

- (i) *X est un $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien de dimension d ,*
- (ii) *les processus X^i , ($i = 1, \dots, d$) sont des $\mathcal{F}_t$ -martingales continues tels que*

$$\langle X^i, X^j \rangle_t = \delta_{ij} t, \quad \text{avec} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Preuve :

(i) $\Rightarrow$ (ii) déjà fait,

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $u \in \mathbb{R}^d$. Alors $u \cdot X_t = \sum_{j=1}^d u_j X_t^j$ est une martingale de processus croissant

$$\sum_{j,k=1,\dots,d} u_j u_k \langle X^j, X^k \rangle_t = \sum_{j=1}^d u_j^2 t = |u|^2 t.$$

Alors d'après la proposition 6.16, $M_t = \exp(iu \cdot X_t + \frac{1}{2}|u|^2 t)$ est une martingale locale. Cette martingale locale est bornée sur les intervalles $[0, T]$, $T > 0$, il s'agit donc d'une vraie martingale.

On a donc pour tout $0 \leq s < t$,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(iu \cdot X_t + \frac{1}{2}|u|^2 t\right) \middle| \mathcal{F}_s\right] = \exp\left(iu \cdot X_s + \frac{1}{2}|u|^2 s\right).$$

En particulier pour $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A \exp(iu \cdot (X_t - X_s))] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \exp(iu \cdot (X_t - X_s)) | \mathcal{F}_s]] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \exp\left(-iu \cdot X_s - \frac{1}{2}|u|^2 t\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(iu \cdot X_t + \frac{1}{2}|u|^2 t\right) \middle| \mathcal{F}_s\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \exp\left(-iu \cdot X_s - \frac{1}{2}|u|^2 t\right) \exp\left(iu \cdot X_s + \frac{1}{2}|u|^2 s\right)\right] \\ &= \mathbb{P}(A) \exp\left(-\frac{1}{2}|u|^2 (t-s)\right). \end{aligned}$$

Avec $A = \Omega$, on en déduit que $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, (t-s)I_d)$. Ensuite pour $A \in \mathcal{F}_s$ de probabilité $\mathbb{P}(A) > 0$, en notant $\mathbb{P}_A(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|A)$, on a

$$\mathbb{E}_A[\exp(iu \cdot (X_t - X_s))] = \exp\left(-\frac{1}{2}|u|^2(t-s)\right).$$

On en déduit que $\mathcal{L}(X_t - X_s|A) = \mathcal{N}(0, (t-s)I_d)$. Pour toute fonction mesurable positive f sur $\mathbb{R}^d$, on a donc

$$\mathbb{E}_A[f(X_t - X_s)] = \mathbb{E}[f(X_t - X_s)],$$

soit, en multipliant par 1_A de part et d'autre et en prenant l'espérance,

$$\mathbb{E}[1_A f(X_t - X_s)] = \mathbb{P}(A) \mathbb{E}[f(X_t - X_s)].$$

Comme c'est vrai pour tout $A \in \mathcal{F}_s$, $X_t - X_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$. Finalement, pour tout $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_p$, le vecteur $(X_{t_j}^i - X_{t_{j-1}}^i)_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq p}$ est un vecteur gaussien, car obtenu en regroupant p vecteurs gaussiens indépendants. Par transformation linéaire, $(X_{t_j}^i)_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq p}$ est encore un vecteur gaussien pour tout $(t_j)_{1 \leq j \leq p}$ et donc X est un processus gaussien. Comme le vecteur $(X_{t_j}^i - X_{t_{j-1}}^i)_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq p}$ a ses composantes indépendantes, le processus est finalement gaussien, à accroissements indépendants et stationnaires, et par hypothèse à trajectoires continues. Cela justifie que $X^1, \dots, X^d$ sont d mouvements browniens indépendants et que X est un $\mathcal{F}_t$ -mouvement brownien d -dimensionnel. $\square$

Contre-exemple : Soit $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \{+1, -1\}$, tel que $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x-1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$ Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\beta = (\beta_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard issu de $y \in \mathbb{R}$ tel que $\beta_0 = y$. On pose

$$B_t = \int_0^t \text{sgn}(\beta_s) d\beta_s.$$

- Montrons que cette intégrale stochastique a un sens :
 1. $(s, \omega) \mapsto \text{sgn}(\beta_s(\omega))$ progressivement mesurable car continue à droite (sgn est une fonction continue à droite et β_s est continu).
 2. $\int_0^t (\text{sgn}(\beta_s))^2 ds = t < +\infty$.
- Y-a-t-il existence faible? On va trouver une EDS pour laquelle on a existence faible d'une solution. Pour appliquer le théorème de Lévy, on s'intéresse à :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\text{sgn}(\beta_s))^2 ds\right] = t < +\infty.$$

Donc $\int_0^t \text{sgn}(\beta_s) d\beta_s$ est une martingale à trajectoires continues avec

$$\langle B \rangle_t = \int_0^t (\text{sgn}(\beta_s))^2 ds = t.$$

On en déduit d'après le théorème de Lévy 6.17 que B est un mouvement brownien par rapport à $\mathcal{F}_t^\beta = \sigma\{\beta_s, 0 \leq s \leq t\}$.

On peut écrire $dB_t = \text{sgn}(\beta_t) d\beta_t$, en multipliant de part et d'autre par $\text{sgn}(\beta_t)$, on a $\text{sgn}(\beta_t) dB_t = (\text{sgn}(\beta_t))^2 d\beta_t = d\beta_t$ d'où

$$\beta_t = y + \int_0^t \text{sgn}(\beta_s) dB_s.$$

β est donc solution de l'équation différentielle stochastique (EDS)

$$\begin{cases} dX_t &= \text{sgn}(X_t) dB_t \\ X_0 &= y \end{cases} \quad (*)$$

pour laquelle il y a donc existence faible. (On a construit une solution qui est faible car on ne se donne pas de brownien.)

$\Rightarrow$ Existence faible.

- Y-a-t-il unicité faible? S'il y a une autre solution, a-t-elle une loi brownienne?

Si on a une autre solution $X_t = y + \int_0^t \text{sgn}(X_s) dB_s$, alors X est une martingale car $\mathbb{E} \left[\int_0^t (\text{sgn}(X_s))^2 ds \right] = t < +\infty$, $\langle X \rangle_t = t$ et $(\text{sgn}(X_s))_{s \geq 0}$ est un processus progressif car continue à droite) X est donc une martingale continue telle que $\langle X \rangle_t = t$ et d'après le théorème de Lévy 6.17, c'est donc un mouvement brownien.
 $\Rightarrow$ Unicité faible.

- Y-a-t-il unicité trajectorielle? On prend $y = 0$ (ne marche pas autrement). On a vu que β_t est solution de $X_t = \int_0^t \text{sgn}(X_s) dB_s$. Mais $-\beta$ est aussi solution issue de 0 correspondant au même mouvement brownien B :

$$\begin{aligned} -\beta_t &= \int_0^t -\text{sgn}(\beta_s) dB_s \\ &= \int_0^t -\text{sgn}(\beta_s) (\mathbb{1}_{\{\beta_s \neq 0\}} + \mathbb{1}_{\{\beta_s = 0\}}) dB_s \\ &= \int_0^t \text{sgn}(-\beta_s) \mathbb{1}_{\{\beta_s \neq 0\}} dB_s \end{aligned}$$

car

$$I_t = \int_0^t \text{sgn}(\beta_s) \mathbb{1}_{\{\beta_s = 0\}} dB_s = 0 \quad \text{p.s.,}$$

en effet, $(I_t)_{t \geq 0}$ est une martingale car son processus croissant est de carré intégrable en espérance et

$$\mathbb{E}[(I_t)^2] = \mathbb{E} \left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{\beta_s = 0\}} ds \right] = \int_0^t \mathbb{P}(\beta_s = 0) ds = 0.$$

Donc $I_t = 0$ p.s. et donc

$$(-\beta_t) = \int_0^t \text{sgn}(-\beta_s) dB_s.$$

$\Rightarrow$ Pas d'unicité trajectorielle.

La fonction sgn n'est pas continue et pas lipschitzienne.

Exemple 6.18. Considérons l'EDS linéaire avec "bruit additif"

$$dX_t = a(t)X_t dt + \sigma(t)dB_t, \quad (6.6)$$

où $a, \sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions déterministes continues bornées. Alors on a l'existence et l'unicité forte d'une solution à l'équation (6.6).

Dans le cas particulier $\sigma = 0$, la solution peut s'écrire simplement

$$X_t = X_0 e^{\alpha(t)} \quad \text{avec} \quad \alpha(t) = \int_0^t a(s) ds.$$

Ceci suggère d'appliquer la méthode de la variation de la constante, c'est-à-dire de chercher une solution de la forme $X_t = C_t e^{\alpha(t)}$. La formule d'Itô appliquée à $C_t = e^{-\alpha(t)} X_t$ nous donne

$$dC_t = -a(t)e^{-\alpha(t)} X_t dt + e^{-\alpha(t)} dX_t = e^{-\alpha(t)} \sigma(t) dB_t,$$

d'où en intégrant et en tenant compte du fait que $C_0 = X_0$,

$$C_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s) e^{-\alpha(s)} dB_s.$$

Ceci donne finalement la solution forte de l'équation (6.6)

$$X_t = X_0 e^{\alpha(t)} + \int_0^t \sigma(s) e^{\alpha(t)-\alpha(s)} dB_s.$$

On vérifie effectivement (6.6) en appliquant la formule d'Itô. On notera que si la condition initiale X_0 est déterministe, alors X_t suit une loi normale d'espérance $\mathbb{E}[X_t] = X_0 e^{\alpha(t)}$ et de variance

$$\text{Var}(X_t) = \int_0^t \sigma(s)^2 e^{2(\alpha(t)-\alpha(s))} ds,$$

par isométrie.

Exemple 6.19. Soit l'EDS linéaire avec "bruit multiplicatif"

$$dX_t = a(t)X_t dt + \sigma(t)X_t dB_t,$$

avec à nouveau $a, \sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions déterministes continues et bornées, de sorte qu'il existe une unique solution forte. Supposons que cette solution ne s'annule pas, nous pouvons alors écrire

$$\frac{dX_t}{X_t} = a(t)dt + \sigma(t)dB_t.$$

En intégrant le membre de gauche, on devrait trouver $\log(X_t)$, mais ceci est-il compatible avec le calcul d'Itô? Pour s'en assurer posons $Y_t = \log(X_t)$ (on suppose ici que la solution est strictement positive). Alors la formule d'Itô donne

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2} \frac{1}{X_t^2} d\langle X \rangle_t \\ &= \frac{1}{X_t} (a(t)X_t dt + \sigma(t)X_t dB_t) - \frac{1}{2} \sigma(t)^2 dt \\ &= a(t)dt + \sigma(t)dB_t - \frac{1}{2} \sigma(t)^2 dt. \end{aligned}$$

En intégrant et en reprenant l'exponentielle, on obtient donc la solution forte

$$X_t = X_0 \exp \left\{ \int_0^t \left(a(s) - \frac{1}{2} \sigma(s)^2 \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s \right\}.$$

En particulier, si $a \equiv 0$ et $\sigma \equiv \lambda$, on retrouve la martingale $X_t = X_0 \exp\{\lambda B_t - \lambda^2 t/2\}$, appelée mouvement brownien exponentiel.